Leitfaden

zum Unterricht

in der niederen, reinen und angewandten

Arithmetik,

zunächst für Schüler,

welche

für das Gymnasium vorbereitet werden,

von

P. Ludwig Preyßinger,

Ord. S. Bened., Professor der reinen und angewandten Mathematik an dem königl. bayer. Lyceum zu St. Stephan in Augsburg.

Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage.

München.

Verlag von Georg Franz.

1850.

Εἰ δὲ φρόνησις ἐργάζεται, τίς αὐτῆς τῶν ὄντων μᾶλλόν ἐστι τεχνίτης;

Ist thätig die Kunst; wo ist eine größere Meisterin unter Allen, als sie?

Seiner Excellenz

dem

Hoch- und Wohlgebornen Herrn

Carl Freiherrn von Stengel,

Präsidenten des k. Appellationsgerichts von Schwaben und Neuburg, Commandeur des Verdienst-Ordens vom heil. Michael, Ritter des Verdienst-Ordens der bayer. Krone, des k. k. österr. Leopolds- und des k. k. russ. St. Stanislaus-Ordens, 2. Klasse mit dem Stern,

und dem

Hoch- und Wohlgebornen Herrn

Fr. Ben. Wilh. v. Hermann,

k. Hofrath,

ordentl. Professor der Staatswirthschaft, Handelswissenschaft, Technologie und polit. Rechenkunst, außerord. Mitglied des k. obersten Kirchen- und Schulraths, und der k. Akademie der Wissenschaften, Ritter des Verdienst-Ordens der bayer. Krone, Offizier des k. belg. Leopolds-Ordens, Ritter des k. sächs. Civil-Verdienst-Ordens und des k. russ. St. Wladimir-Ordens 4. Klasse

gewidmet mit tiefster Verehrung

vom

Verfasser.

Vorwort.

Es ist leider nur zu bekannte Thatsache, daß die Mathematik, trotz ihrer Unentbehrlichkeit, trotz der Evidenz ihrer Wahrheit, doch unter allen Lerngegenständen der von vielen Studierenden am gleichgiltigsten beurtheilte und am meisten gefürchtete und verachtete sey. — Was die Ursache davon seyn möge, dieses weit zu erörtern liegt nicht im Plane dieser Vorrede; aber daß des Lehrers eigene Wärme für diesen Gegenstand, seine herablassende, der Schwäche des Schülers ausdauernd zu Hilfe kommende und Interesse für den Gegenstand erregende Liebe am sichersten auch Liebe an die Stelle der Abneigung hervorrufen werde; darüber sind Alle, der Mathematik Feinde wie Freunde, einverstanden.

Ja unendlich viel hängt von der Subjektivität des Lehrers ab, indem es bei ihm gelegen seyn muß, schwierige Gegenstände leicht und lieb zu machen, und minder verständlich abgefaßte Lehrbücher so ins Licht zu setzen, daß der Studirende den Gegenstand ohne abschreckendes Vorurtheil, mit Liebe aufgreift und mit Glück ihn verarbeitet. Sehr erregt es aber auch des Schülers Privatfleiß, wenn das Lehrbuch verständlich genug ist, um das vorarbeitende Studium nicht zurückzustossen, und wenn es doch auch nicht ins Kleinlichte zu sehr zerfasert ist, um den nachholenden Fleiß nicht anzuecken.

Besondere Rücksicht verdienen beim Unterricht (vorzüglich in der Mathematik) die Anfänger, welche nur von Schritt zu Schritt zu leiten sind, daß sie sicher und muthig von dem Leichteren zum Schwereren übergehen, vom Niederen zum Höheren aufzusteigen vermögen.

Für Anfänger erscheint hier ein Versuch eines arithmetischen Lehrbuches, welches der Verfasser besagtem Zwecke anzupassen sich bestrebt hat.

In wiefern es ihm gelungen, mögen Kenner beurtheilen; doch merkt er zu dem Ende noch an, daß dieser Versuch lediglich als solcher betrachtet werden, und durchaus nicht auf Originalität Anspruch machen will, — wie könnte er dieß auch bei dem Vorhandenseyn der trefflichsten Werke, welche in diesem Zweige der Wissenschaft zu Tage gefördert worden sind! — vielmehr bekennt der Verfasser, viele der vorzüglichsten Arithmetiken benützt zu haben, namentlich die von Dr. Desberger, Friedrich, Herrmann, Hoffmann, Kries,

Neubig, Salomon, Schwerd, Weigel oder Wandner... Worauf aber des Verfassers besonderes Streben hinging, war, einen unserm Schulplane entsprechenden Leitfaden zu liefern, und für Schüler zur Erleichterung des Studiums mit der Theorie die Praxis, mit der reinen Arithmetik die angewandte stets zu verbinden, gedenkend der Worte: „Grau ist alle Theorie, o Freunde! grün des Lebens goldner Baum."

In den praktischen Theilen sind öfters — in Erklärungen und Beispielen, von welchen viele aus Huther, Kummer... entnommen sind, — Angaben eingemischt, welche der Lehrer zur Erhaltung der Aufmerksamkeit weiter besprechen wird.

Der Leitfaden ist in drei Kurse abgetheilt, von welchen der erste die ganzen Zahlen, der zweite die gebrochenen Zahlen, und der dritte die Proportionen behandelt.

Weil aber diese Lehre in drei Jahren, wenn dem Arithmetikunterricht wöchentlich zwei Stunden geweiht werden, besonders mit guten Schülern, in einer Weise vollendet werden dürfte, daß in das vierte Jahr wenig oder gar nichts mehr kommt, so wurde dem zweiten Kurs Einiges von der Potenzenlehre nachgesetzt, was in dem vierten Jahre bei der Repetition der ganzen Arithmetik, wenigstens mit den talentvolleren Schülern durchgenommen werden kann, damit dem Schüler nach Eintritt in das Gymnasium die Rechnungen mit allgemeinen Größen sogleich gelehrt werden können.

Seinen Versuch, von welchem die erste Auflage nicht im Buchhandel erschienen, sondern im Stifte St. Stephan zu kaufen war, übergibt der Verfasser allen Freunden der Mathematik, mit dem Bemerken, daß er gutgemeinte Berichtigungen mit Dank annehmen und im Falle einer zu wiederholenden Umarbeitung dieses Leitfadens sorgfältigst benützen werde.

Augsburg, am 8. Juli 1844.

P. F. P.

Inhalts-Verzeichniß.

Einleitung.

§. 1.

Begriff der Mathematik.

Mathematik (μάθημα, μάθησις) ist die Wissenschaft von den Formen der Größen.

* In der Mathematik werden die Größen in Ordnung (in regelmäßiger Zusammenstellung) oder im regelmäßigen Zusammenhange — systematisch — betrachtet.

§. 2.

Erklärung und Eintheilung der Größen.

1) **Größe** (quantum, d. i. Gegenstand oder Objekt der Mathematik) heißt alles dasjenige, was vermehrt oder vermindert (was aus Theilen besteht oder aus solchen bestehend gedacht) werden kann.

* Das Wort Größe bezeichnet an verschiedenen Dingen verschiedene Eigenschaften, und wird als einfacher Begriff nicht leicht vollkommen erklärt werden können.

2) Man hat verschiedene Arten von Größen zu unterscheiden, und zwar:

a) ohne Rücksicht, ob sie im Leben vorkommen oder nicht,

A. **Mengengrößen** (**discrete** Größen),

B. **Raum- und Zeit-Größen** (**stetige** Größen), und

C. **Kraftgrößen** (**intensive** Größen);

* Wenn von einer intensiven Größe gesprochen wird, so wird man wohl auch sogleich an eine **extensive** denken; diese ist eine Raumgröße.

und dann

b) in Rücksicht, ob sie

A. blos an und für sich — rein — d. i. im Gedanken, oder

B. wie sie an den wirklichen Gegenständen in der Natur vorkommen — mit Anwendung — betrachtet werden.

§. 3.

Eintheilung der Mathematik.

Die Mathematik findet man eingetheilt:

a) rücksichtlich des Gegenstandes:

A. in so fern sie die diskreten Größen betrachtet, in Arithmetik (ἀριθμός);

B. in so fern sie die stetigen Größen betrachtet:

AA. in Geometrie, welche die Raumgrößen und

BB. in Chronologie, welche die Zeitgrößen erörtert; und

C. in so fern sie die Kraftgrößen betrachtet, in Mechanik;

b) rücksichtlich

A. der Theorie in reine, und

B. der Praxis in angewandte Mathematik, und endlich noch

c) in Rücksicht des Umfangs (der Sphäre) der Untersuchungen:

A. in niedere und

B. in höhere Mathematik.

* Keine von diesen drei Rücksichten der Eintheilung ist in einer geordneten Betrachtung der Größen ganz unbeachtet.

§. 4.

Methode, und Terminologie.

1) Die Mathematiker haben eine eigene Art und Weise, ihre Lehren vorzutragen und zu begründen. Sie heißt die mathematische Methode, und ist das Bild und Muster jeder Wissen schaffenden Methode.

* Die Mathematik, welche ihren Gegenstand zum vollkommenen Wissen, zur Evidenz bringt, heißt κατ' ἐξοχήν: Wissenschaft.

2) Die äußere Form der mathematischen Methode ist, daß man jedem Satze den Terminus oder die Benennung vorsetzt. Diese Titel sind:

a) Erklärungen (definitiones), mit welchen die Mathematik beginnt; auf sie folgen

b) Sätze (propositiones), und zwar:

α) Grundsätze (axiomata),

β) Lehrsätze und Zusätze (theoremata et corollaria),

γ) Aufgaben mit Auflösungen (problemata et solutiones),

δ) willkürliche Sätze (hypotheses),

ε) Lehnsätze (lemmata). — Die Sätze werden bewiesen; daher

c) Beweise (demonstrationes), welche

α) synthetisch — progressiv — oder

β) analytisch — regressiv — sind;

* Ein Beweis heißt direct, wenn das zu Erweisende unmittelbar aus den angeführten Gründen hervorgeht; zeigt man aber die Unmöglichkeit des Gegentheils der Behauptung, so heißt der Beweis indirect, oder Beweis ex absurdo.

und

d) Anmerkungen. Der Anmerkungen bedienen sich die Mathematiker, um ihren Lehren nöthige Erläuterungen, geschichtliche Angaben u. dgl. beizugeben.

3) Der Kürze wegen (um nicht Alles mit Worten ausdrücken zu müssen) hat man in der Mathematik eine gewisse Schrift, eigene Zeichen eingeführt. Sie sind willkürlich angenommene Bilder der Größen, der Verbindungen und der Formen der Größen und der Verbindungen; sie heißen:

a) Größen- oder Quantitätszeichen,

b) Rechnungs- oder Operationszeichen, und

c) Beschaffenheits- oder Qualitätszeichen.

* Durch die Zeichen kann man eine Reihe von Sätzen leicht überschauen und dem Gedächtniß einprägen. Sie sind der Methode sehr dienlich.

§. 5.

Nutzen oder Werth.

Das Gesetz, daß Alle, welche auf der wissenschaftlichen Bahn gehen wollen, Mathematik studiren müssen, hat seinen Ursprung in der Ueberzeugung, **„Mathematik ist das beste Bildungsmittel des Verstandes.“**

„Exercet animum hoc genus disciplinarum ad subtilora cernenda, ne luce illorum repercussus et eam sustinere non valens, in easdem tenebras quas fugere cupiebat, libenter refugiat: et affert argumenta, nisi fallor, certissima, quibus quod fuerit inventum atque confectum, non nisi impudentem habeat dubitationem, quantum homini talia vestigare permissum est.“ S. Aug. de quant. an. c. 15.

* Außerdem aber, daß die Mathematik Bildungsmittel des Verstandes ist, ist sie der Grund für alle nutzbringenden Gewerke, und eine Quelle reinster Freude. —

Denen, welche die Mathematik schmähen, ist kurz zu sagen:

Ars non habet osorem nisi ignorantem.

Niedere,

reine und angewandte

Arithmetik.

Erster Curs.

I. Hauptstück.

Von den Zahlen überhaupt.

II. Hauptstück.

Von den ganzen Zahlen.

A.

Von den ganzen reinen Zahlen.

B.

Von den ganzen angewandten Zahlen.

I. Hauptstück.

Von den Zahlen überhaupt.

§. 6.

Erklärungen.

1) Arithmetik ist die geordnete Lehre von den Zahlen.

2) Eine Zahl ist ein Inbegriff von gleichartigen Einheiten.

* Ungleichartige Einheiten können nie unter eine Zahl gebracht werden.

3) Eine Einheit ist ein jedes Ding (ens), als ein Einziges.

* Die Einheiten unterscheiden sich
als niedere und
als höhere.

§. 7.

Eintheilung der Zahlen.

Bei der Betrachtung der Zahlen (der Gegenstände der Arithmetik) ist darauf zu sehen:

a) wenn eine Zahl einzeln betrachtet wird,

A. ob sie ist

α) eine bestimmte, d. i. eine solche, welche die Menge der Einheiten genau angibt, z. B. zwölf, dreiunddreißig . . . oder

β) eine unbestimmte — allgemeine — d. i. eine solche, welche diese Menge nicht genau angibt; z. B. viele, einige . . .

B. ob sie ist

α) eine ganze oder

β) eine gebrochene; und

C. ob sie ist

α) eine reine — unbenannte — d. i. eine solche welche blos die Menge, nicht aber die Art angibt, z. B. vierzig, sieben .... oder

β) eine angewandte — benannte — d. i. eine solche, die außer der Menge noch die Art der Einheiten angibt, z. B. zwölf Apostel, sieben Tage, viele Menschen, einige Regenten ....

* (Man übe mehrere Beispiele!)

b) wenn wenigstens zwei Zahlen mit einander in Betracht kommen,

A. ob sie einander gleich sind; — Gleiche Zahlen heißen diejenigen, welche aus gleich viel Einheiten bestehen — oder

B. ob sie einander nicht gleich sind. — Ungleiche Zahlen heißen diejenigen, von denen die eine mehr Einheiten enthält als die andere. —

Eine Zahl, die mehrere gleichartige Einheiten in sich faßt, heißt die größere im Vergleich mit einer andern, die aus weniger solchen Einheiten besteht. Die letztere heißt in Rücksicht auf die erstere die kleinere.

§. 8.

Erklärungen.

1) Arithmetik (Rechenkunst) im engern Sinne ist die Lehre von den verschiedenen möglichen Veränderungen und Verbindungen der Zahlen, und von dem daraus abgeleiteten Verfahren, aus bekannten Zahlen davon abhängige unbekannte zu finden.

* Beim Rechnen werden vielmals gewisse Vortheile, mit Vernachlässigung der streng mathematischen Form, zur leichtern und schnellern Operation . . . benützt. Der Lehrende und Lernende vergesse nie, daß zur Bildung des Verstandes nicht mechanisches Verfahren, sondern Beobachtung der streng mathematischen Methode frommt. Jeder soll sich daher angewöhnen, möglichst genau mathematisch zu rechnen.

2) Die möglichen Veränderungen der Zahlen sind

a) Vermehrung durch Hinzugabe, und

b) Verminderung durch Hinwegnahme.

a.

Vermehrt wird eine Zahl nur, indem man ihr eine oder mehrere Einheiten beigibt, und zwar so:

α) Entweder kommen zu der einen Zahl nach und nach Einheiten, oder andere Zahlen, die unter sich ungleich sind — Addition — oder

β) eine und dieselbe Zahl wird öfters zu sich selbst gesetzt — Multiplication —.

b.

Vermindert wird eine Zahl, wenn man Einheiten, woraus sie besteht, von ihr wegnimmt.

α) Entweder nimmt man eine Einheit oder eine Zahl von einer andern nur einmal — Subtraction — oder

β) man nimmt sie mehrmal hinweg — Division —.

* Die Addition, Multiplication, Subtraction und Division geben die sogenannten vier Species.

3) Die Ordnung, nach welcher diese vier Rechnungsarten (Grundrechnungsarten) gewöhnlich erörtert werden, bespricht zuerst

a) die Addition und nach ihr

b) die Subtraction, das Gegentheil der Addition, dann

c) die Multiplication und nach ihr

d) die Division, das Gegentheil der Multiplication.

a.

Addiren (ad-dare) heißt eine Zahl finden, die mehreren gegebenen Zahlen zusammen genommen gleich ist. Addiren ist daher gleich Summiren (summare).* Die zusammen zu nehmenden Zahlen heißen Summanden (numeri summandi) oder Posten; die zu findende Zahl heißt Summe.

b.

Von einer Zahl eine andere subtrahiren (subtrahere) heißt von ersterer so viele Einheiten hinwegnehmen, als letztere enthält, oder den Unterschied zwischen beiden finden. Jene Zahl, von der abgezogen wird, nennt man Minuend (numerus minuendus); die abzuziehende heißt Subtrahend (numerus subtrahendus) oder Subtractor; die Zahl, welche nach der Subtraction übrig bleibt, heißt Rest oder Unterschied — Differenz — (differre).

c.

Multipliciren (multiplicare) heißt eine gegebene Zahl so oft zu sich selbst setzen, als eine zweite Einheiten enthält. Die gegebenen zwei Zahlen nennt man **Factoren** (facere); und zwar die erste das **Multiplicand** (numerus multiplicandus), die zweite den **Multiplicator**, und die durch Multiplication hervorgebrachte Zahl heißt **Produkt** (producere).

* Die Multiplication ist eine abgekürzte Addition.

d.

Eine Zahl durch eine zweite **dividiren** (dividere) heißt aus zwei gegebenen Zahlen eine dritte finden, welche anzeigt, wie oft die eine in der andern enthalten ist. Die Zahl, welche dividirt wird, heißt **Dividend** (numerus dividendus), jene, womit man dividirt, der **Divisor**; die dritte Zahl, welche anzeigt, wie oft dieser in jenem enthalten ist, heißt der **Quotus** oder **Quotient** (quoties).

* Division ist eine abgekürzte Subtraction; denn im Dividend ist der Divisor so oft enthalten, wie oft von jenem dieser abgezogen werden kann. Das Dividiren ist ein wahres Ausmessen der Zahlen; der Divisor ist das Maaß, welches in das Dividend — die zu messende Größe — als Einheit hineingelegt wird. Das Wie oft? bestimmt der Quotient.

4) Die verschiedenen Theile einer jeden Rechnungsart bestimmen einander gegenseitig, und es kann jeder Theil, als unbekannt, aus den übrigen (als den bekannten) gefunden werden. Man macht, mittelst der Grundrechnungsarten, gewisse verschiedenartige Verbindungen der verschiedenen Größen — indem zwei dem Werthe nach gleiche, der Form nach aber (gewöhnlich) ungleiche Ausdrücke immer durch das bestimmte Zeichen (Gleichheitszeichen) zusammengestellt werden — und diese geben die verschiedenen Arten von Rechnungen. Die Termini dieser Rechnungsarten — welche im Grunde alle Gleichungen sind — heißen:

A. **Verhältniß**,

B. **Proportion** (und daraus Progression),

C. **Gleichung** (im engern Sinne).

* Die Gleichungen im engern Sinne werden vorzüglich in den

Rechnungen mit allgemeinen Größen behandelt; daher mag es kommen, daß Viele die Rechnung mittelst der Buchstaben Algebra nennen.

§. 9.

Erklärung der Zeichen.

In der Mathematik hat man eigene Zeichen (§. 4. 3.) und zwar:

a) Quantitätszeichen,

b) Operationszeichen und

c) Qualitätszeichen.

a.

Man hat andere Quantitätszeichen

α) für bestimmte (§. 7. a. A.), und andere

β) für unbestimmte Größen.

α.

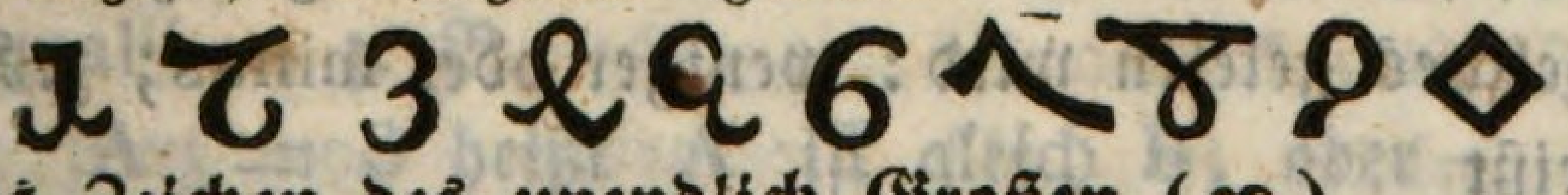
Für die bestimmten Größen hat man (vornehmlich):

$\alpha\alpha$) die Nulle (0), welche nicht Nichts, sondern entweder unendlich Kleines ($\frac{1}{\infty}$) oder den Mangel einer zählenden Größe angibt;

$\beta\beta$) die sogenannten neun arabischen* Ziffern — Zahlzeichen — (1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9).

Das Zeichen: 1 wird ausgespr. m. d. Worte: Eins;
„ „ 2 „ „ „ „ „ Zwei;
„ „ 3 „ „ „ „ „ Drei;
„ „ 4 „ „ „ „ „ Vier;
„ „ 5 „ „ „ „ „ Fünf;
„ „ 6 „ „ „ „ „ Sechs;
„ „ 7 „ „ „ „ „ Sieben;
„ „ 8 „ „ „ „ „ Acht;
„ „ 9 „ „ „ „ „ Neun.

* Arabische Ziffern werden diese Zeichen genannt, weil sie Gerbert (später Papst Sylvester II. † 1003) von den Arabern zu den Römern und Franzosen gebracht hat. — Die arabischen Ziffern unsrer Ahnen findet man ungefähr in folgenden Formen:



$\gamma\gamma$) das Zeichen des unendlich Großen (∞)

β.

Für die unbestimmten Größen hat man die Buchstaben des lateinischen und griechischen Alphabetes, und zwar sollen bezeichnen

αα) die Anfangsbuchstaben allgemein bekannte,

ββ) die Endbuchstaben allgemein unbekannte Größen.

(Diese letzteren wird auch der Leitfaden für zu suchende Größen öfter setzen).

* Die Buchstaben wurden durch Vieta (1540 — 1603) Größenzeichen.

** Die Römer und Griechen gebrauchen auch ihre Buchstaben als Zahlzeichen. Von ihnen in den Grammatiken.

Die Klammern (Einschlußzeichen) werden gebraucht, wenn man mehrere Größen zusammen genommen als eine einzige Größe betrachtet und behandelt.

* Die Klammern können als Quantitäts- und als Qualitäts-Zeichen angesehen werden.

** Am häufigsten sind die eingeschlossenen Gliedern durch + und — verbunden; sie können aber auch durch alle Zeichen der vier Species unter einander verbunden seyn. Eine Parenthese auflösen heißt, den arithmetischen Ausdruck, der in Klammern eingeschlossen ist, mit einem andern gleichbedeutenden vertauschen, welcher von allen Einschließungszeichen befreit ist. Die eingeschlossenen Glieder werden bei der Auflösung der Parenthesen in diejenige Verbindung mit den äußern Gliedern gebracht, die durch das arithmetische Verbindungszeichen gefordert wird.

b.

Von den Operationszeichen, welche vorzunehmende Abänderungen in den Größenverbindungen fordern, oder vorgenommene anzeigen, sind vorzüglich (für die bloße Rechenkunst) zu merken:

α) Das Zeichen der Zusammenzählung ein zwischen den Summanden stehendes Kreuz (+), welches ausgesprochen wird: und, plus oder mehr; z. B. 5 + 4 heißt

5 und 4, oder

5 plus 4, oder

5 mehr 4;

β) Das Zeichen der Abziehung, eine kurze, wagerechte, zwischen Minuend und Subtrahend gesetzte Linie (—), welches gelesen wird: weniger oder minus; z. B. 9 — 5 heißt

9 weniger 5, oder

9 minus 5;

* Ausdrücke, in denen mehrere Größen durch + und — verbunden erscheinen, heißen zusammengesetzte, gleichnamige, complexe

Größen (Polynome), und die einzelnen Größen heißen Glieder derselben. Diese einzelnen Glieder, für sich betrachtet, heißen Monome; complexe Größen, die aus zwei durch + und — verbundenen Theilen bestehen, heißen Binome ꝛc.

γ) Das Zeichen der Vermehrung, ein zwischen den Factoren liegendes Kreuz oder ein Punkt (× oder .), welches gelesen wird: mal oder multiplicirt, vermehrt mit, z. B. 3×8 oder 3 . 8 heißt

3 mal 8, oder

3 vermehrt mit 8;

δ) Das Zeichen der Theilung, ein zwischen Dividend und Divisor gesetzter Doppelpunkt (:) oder eine kurze Querlinie, über welcher das Dividend und unter welcher der Divisor zu stehen kommt, wird gelesen: dividirt oder getheilt durch, z. B. 8 : 4 oder $\frac{8}{4}$ heißt 8 dividirt oder getheilt durch 4.

* Mehrere auf einander folgende Punkte zeigen an, daß die Operation noch nicht vollendet ist.

c.

α) Die Beschaffenheit einer einzelnen Größe wird bezeichnet, wenn sie

positiv (gesetzt) wird, durch (+) das Zeichen der Addition (welches am Anfange bei jeder Größe, die kein anderes Zeichen hat, verstanden wird), und wenn sie

negativ (geläugnet) wird, durch (—) das Zeichen der Subtraction.

* Positive und negative Größen nennt man entgegengesetzte Größen.

β) Die Gleichheit zweier Größen wird angezeigt durch zwei zwischen den gleichen Größen gesetzte horizontale Linien (=); es heißt dieses Zeichen „gleich" oder „aequal" — z. B.

A = B heißt A ist gleich B, oder

2 . 2 = 4 = 2 . 2 = = 4.

* Zwei durch das Zeichen der Gleichheit verbundene Ausdrücke nennt man eine Gleichung.

γ) Die Ungleichheit zweier Größen zeigt ein zwischen die zwei Größen gestellter spitzer Winkel. Die

Spitze weiset immer auf die kleinere und die Oeffnung auf die größere Größe, z. B. 9 > 6 heißt 9 ist größer als 6.

δ) Die Unentschiedenheit zwischen zwei Größen wird durch (≷) bezeichnet; z. B. A ≷ B heißt: es ist unentschieden, ob A größer sey als B oder B größer als A.

ε) Das Komma dient vorzüglich als Eintheilungszeichen bei größern durch Ziffern ausgedrückten Zahlen.

* Da in der Mathematik der Punkt, der Doppelpunkt, der Gedankenstrich und das Komma eigene Bedeutung haben, so ist es gut, sie in der Mathematik nicht als Unterscheidungszeichen ꝛc. zu gebrauchen, und für sie lieber, wenn durch sie Undeutlichkeit entstünde, etwa den Strichpunkt zu nehmen.

§. 10.

Grundsätze.

1) Den Anfängern in der Mathematik sind zu wissen nöthig einige Grundsätze (Axiomata [§. 4, 2. b. α.]). Grundsätze sind jene Sätze, welche von den Erklärungen zunächst abgeleitet werden, wegen ihrer Einfachheit von selbst einleuchten und keines Beweises bedürfen.

2) Hier etwelche:

Jedes Ding, jede Größe, ist sich selbst gleich.

Das Ganze ist so groß als alle seine Theile zusammen.

Größen, die einander gleich sind, lassen sich auch für einander setzen (substituiren).

Das Ganze ist größer, als ein oder mehrere seiner Theile.

Zwei Größen, die der nämlichen dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

Was größer ist, als die eine von zwei gleichen Größen, ist auch größer als die andere.

Was kleiner ist, als die eine von zwei gleichen Größen, ist auch kleiner als die andere.

Was größer ist, als die größere von zwei ungleichen Größen, ist auch größer, als die kleinere.

Was kleiner ist, als die kleinere von zwei ungleichen Größen, ist auch kleiner, als die größere.

II. Hauptstück.

Von den ganzen Zahlen.

A.

Von den ganzen reinen Zahlen.

I. Artikel.

Vom Zahlensysteme und vom Numeriren.

§. 11.

Erklärungen.

1) Eine Größe als Inbegriff mehrerer Einheiten, als ein Ganzes betrachtet, heißt eine ganze Zahl (§. 7. a. B. α.).

2) Eine Einheit für sich selbst heißt Eins (= 1);
eine andere Einheit zu ihr heißt Zwei (= 2);
zu zwei eine Einheit heißt Drei (= 3);
= drei = = = Vier (= 4);
= vier = = = Fünf (= 5);
= fünf = = = Sechs (= 6);
= sechs = = = Sieben (= 7);
= sieben = = = Acht (= 8);
= acht = = = Neun (= 9);
= neun = = = Zehn (=10).

* So kann man sich die Zahlen bis in's Unendliche fortgebildet denken. Es gibt keine größte Zahl; denn wenn eine noch so große Zahl gegeben ist, so läßt sich doch immer eine noch größere denken.

3) Wollte man für jede mögliche Zahl ein neues Wort und besondere Zeichen gebrauchen, so würde Benennung und Bezeichnung unmöglich. Diesem Mißstande wird durch das allgemein eingeführte Zahlensystem — das Decimalsystem oder die Dekadik — durch jene Unterordnung der Zahlen abgeholfen, nach welcher zehn Einheiten einer Ordnung immer eine Einheit der nächst höhern Ordnung werden.

Man merke sich für die Dekadik folgendes Gesetz:

I. Eine Zahl kleiner als Zehn heißt ein Einer; die Zahl von zehn Einheiten heißt Zehner (§. 12, 2.);

zehn Zehner	nennt man einen	Hunderter;
= Hunderter	= = =	Tausender;
= Tausender	= = =	Zehntausender;
= Zehntausender	= = =	Hunderttausender;
= Hunderttausender	= = eine	Million u. s. w.

II. Zahlen, welche zehnmal größer sind, als unmittelbar vorhergehende, heißen (im Vergleich mit diesen) Zahlen höherer Ordnung.

Die Zehner	sind von der	I. Ordnung;
= Hunderter	= = =	II. =
= Tausender	= = =	III. =
= Zehntausender	= = =	IV. =
= Hunderttausender	= = =	V. =
= Millionen	= = =	VI. =

u. s. w.

4) Die nach Zehn nächst größern Zahlen, die durch wiederholtes Zugeben einer Einheit entstehen, sind:

Eilf	(= 11);
Zwölf	(= 12);
Dreizehn	(= 13);
Vierzehn	(= 14);
Fünfzehn	(= 15);
Sechszehn	(= 16);
Siebenzehn	(= 17);
Achtzehn	(= 18);
Neunzehn	(= 19); u. s. w.

5) Alle fernern größeren Zahlen sind entweder

a) ein Mehrfaches von Zehn, nämlich:

Zwanzig	d. i. eine Zahl von	zweimal Zehn	(= 20);
Dreißig	= = = =	dreimal =	(= 30);
Vierzig	= = = =	viermal =	(= 40);
Fünfzig	= = = =	fünfmal =	(= 50);
Sechszig	= = = =	sechsmal =	(= 60);
Siebenzig	= = = =	siebenmal =	(= 70);
Achtzig	= = = =	achtmal =	(= 80);
Neunzig	= = = =	neunmal =	(= 90);

oder

b) eine Summe aus einem Mehrfachen von Zehn und aus einer Zahl kleiner als Zehn (aus einem Einer), z. B. Dreiunddreißig (= 33), ein dreifaches von Zehn mehr Drei (= 10 . 3 + 3).

§. 12.

Erklärungen.

1) Durch das Dezimalsystem ist allgemein angenommen, daß eine Ziffer, die einer andern unmittelbar zur Linken steht, vermöge ihrer Stelle einen zehnmal höhern Werth hat, oder nächsthöherer Ordnung (§. 11) sey, während die zur Rechten stehende von nächstniederer Ordnung ist.

2) Die Ziffern haben daher einen doppelten Werth:

a) einen natürlichen, d. h. die Anzahl der Einheiten, welche die Ziffer an und für sich, oder vermöge ihrer Figur ausdrückt (§. 9), angebenden, und

b) einen Lokalwerth, welcher von der Stelle abhängt, welche die Ziffer einnimmt, und daher auch Stellenwerth genannt wird; z. B. in 333 ist drei der natürliche Werth der Ziffer 3, aber Hundert, Zehn und Eins der Lokalwerth derselben.

3) Die Stellen, welche die Ziffern in der Dekadik einnehmen können, nenne man: Einerstelle, Zehnerstelle 2c. . . .

* Es könnten unzählige Zahlensysteme aufgestellt werden (z. B. das dyadische, das duodekadische System 2c. 2c.), aber für jedes wären andere Ordnungen zu bestimmen.

§. 13.

Erklärung.

Das Verfahren, Zahlen auszusprechen und zu schreiben, heißt Numeriren.

I. Aufgabe.

Jede mit Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen oder zu lesen.

Auflösung.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Einerstelle zur Zehnerstelle in Klassen ein von sechs zu sechs Ziffern; setze über die erste Ziffer der zweiten Klasse (die siebente von der

Einerstelle gegen die Zehnerstelle) ein Strichchen, welches Zeichen Millionen bedeutet; über die erste Ziffer der dritten Klasse zwei Strichchen, die Billionen bedeuten u. s. w.

2) Jede dieser Klassen theile man wieder unterhalb der Reihe nach drei Ziffern durch ein Komma ab, welches Tausend gelesen wird.

3) Dann lese man die Ziffern jeder Klasse so, als wenn sie für sich eine Zahl bezeichneten (nach dem Decimalsysteme), und spreche den bei der letzten Ziffer durch die (in 1 und 2) angegebenen Zeichen ausgedrückten Werth dazu aus; z. B. man lese:

1‴,357,924″,680,951′,738,462.

Eine Trillion, dreimalhundert siebenundfünfzig Tausend, neunhundert vierundzwanzig Billionen, sechsmalhundert achtzig Tausend, neunhundert einundfünfzig Millionen, siebenmalhundert achtunddreißig Tausend, vierhundert und zweiundsechszig. Z. B.

37⁗,895,310‴,246,281″,278,347′,856,214.

Siebenunddreißig Quadrillionen, achtmalhundert fünfundneunzig Tausend, dreihundert und zehn Trillionen, zweimalhundert sechsundvierzig Tausend, zweihundert einundachtzig Billionen, zweimalhundert achtundsiebenzig Tausend, dreihundert siebenundvierzig Millionen, achtmalhundert sechsundfünfzig Tausend, zweihundert und vierzehn.

4) Wenn Nullen in der Zahl sind, so werden ihre Stellen im Aussprechen übergangen; z. B.

5⁗,000,043‴,700,000″,100,000′,600,829.

Fünf Quadrillionen, dreiundvierzig Trillionen, siebenmalhunderttausend Billionen, einmalhunderttausend Millionen, sechsmalhunderttausend acht Hundert und neunundzwanzig.

* Einige Arithmetiker gebrauchen auch den Punkt als Unterscheitungszeichen; in diesem Leitfaden aber soll der Punkt unten zwischen Ziffern Multiplications- und oben Decimalzeichen seyn.

II. Aufgabe.

Jede durch Worte gegebene Zahl in Ziffern auszudrücken.

Auflösung.

Man drücke jede Menge der in jeder Ordnung gegebenen Einheiten durch eine ihr gebührende Ziffer aus, und setze

sie in die gehörige Stelle, wobei man diejenigen mit Nullen ausfüllen muß, worin keine Einheiten gegeben sind; z. B. Achttausend sieben Hundert und fünfundsechszig (= 8000 + 700 + 60 + 5 = 8,765); Fünfzehntausend sieben Hundert achtundsiebenzig (100000 + 5000 + 700 + 70 + 8 = 15,778); Dreimalhundert Tausend, vier Hundert und zweiundneunzig (= 300,492).

* Uebung im Anschreiben und Aussprechen der Zahlen wird dem Schüler mehr als alle Regeln zur Fertigkeit helfen.

II. Artikel.

Veränderungen der Zahlen durch die Grundrechnungsarten.

§. 14.

Addition (§. 8. a.).

Aufgabe.

Mehrere gegebene Zahlen zusammen in eine Summe zu bringen.

Auflösung.

1) Man setzt die Summanden so unter einander, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte u. s. w. zu stehen kommen, und mache unter die so angesetzten Summanden einen Strich, um sie von der Summe abzusondern.

2) Dann addire man die Columne der Einheiten, und setze die Summe derselben, wenn sie einzifferig ist, unter dem Striche an die Stelle der Einheiten; ist aber die Summe zweizifferig, so setze man blos die Einheiten derselben an die genannte Stelle, und die darin enthaltenen Zehner addire man zur Columne der Zehner. Die Einheiten der Summe der Zehner setze man unter dem Striche an die zweite Stelle, die Zehner jener Summe aber zähle man zu den Einheiten der nächsthöhern Ordnung, und fahre auf diese Art fort, um die verlangte Summe zu erhalten.

* Sind sehr viele Zahlen zu addiren, so erleichtert man sich die Arbeit dadurch, daß man die Summanden in zwei oder mehrere Abtheilungen bringt, jede Abtheilungen für sich summirt, um so aus den erhaltenen Theilsumme die Totalsumme zu erhalten.

Beispiele.

I. Man addire die Zahlen 4132; 75; 697; 32790.

Auflösung.

4132	Summanden.
75	
697	
32790	
37694	Summe.

II. Man bringe in eine Summe die Zahlen 67024; 513; 3428; 734; 51034; 67432.

Auflösung.

67024	Summanden.
513	
3428	
734	
51034	
67432	
190165	Summe.

III. Man summire 73649; 852; 10639; 35; 42860.

IV. Man zähle zusammen 1467903; 35; 10075; 792548; 1594.

* Um von der Richtigkeit der gefundenen Summe nicht in Zweifel zu seyn, wiederhole man die Addition noch einmal und zwar so, daß man das Zweitemal von oben herab addirt, wenn man das Erstemal von unten herauf addirt hat, und umgekehrt.

§. 15.

Subtraction (§. 8. b.).

Aufgabe.

Eine Zahl von einer andern zu subtrahiren.

Auflösung.

1) Man setze unter den Minuend den Subtrahend so, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte zu stehen kommen, und ziehe einen Querstrich darunter.

2) Dann ziehe man von der Einerstelle gegen die Zehnerstelle (von der Rechten gegen die Linke) die einzelnen Ziffern des Subtrahends von denen des Minuends der Ordnung

nach ab, und setze den jedesmaligen Rest in gerader Linie unter die entsprechenden Zifferstellen.

3) Ist eine oder die andere Zifferstelle des Subtrahends größer als die entsprechende Ziffer im Minuende, so borge man von der Ziffer der nächsthöhern Ordnung eine Einheit und bezeichne diese Ziffer mit einem Punkte (zum Zeichen, daß sie nun um eine Einheit kleiner sey). Diese geborgte Einheit enthält zehn Einheiten der nächstniedern Ordnung (§. 11); man vermehre daher die Ziffer, von welcher abgezogen werden soll, um zehn Einheiten, und subtrahire dann von dieser Summe die darunter stehende Ziffer des Subtrahends.

4) Wenn auf der Ziffer, von welcher nicht abgezogen werden kann, eine oder mehrere Nullen folgen, so gehe man bis zu der nächst bedeutenden Ziffer, von welcher eine Einheit geborgt, und in zehn Einheiten der nächst niedern Ordnung aufgelöst wird. Nimmt man von diesen wieder eine Einheit hinweg, so bleiben an der vorigen Stelle nur noch neun, und die folgende Zifferstelle wird zehn, wovon aber wieder eine Einheit in Einheiten der nächstniedern Ordnung aufgelöst wird. Daher verwandelt sich auch diese Stelle in einen Neuner, und so werden aus allen Nullen lauter Neuner, bis auf die letzte Nulle rechts, die zehn wird, wenn von der vorhergehenden Ziffer die entsprechende Ziffer des Subtrahends abgezogen werden kann, im entgegengesetzten Falle wird aber auch aus dieser letzten Nulle ein Neuner.

5) Wenn der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, so zieht man gewöhnlich den Minuend vom Subtrahend ab, und macht die Differenz negativ.

Beispiele.

I. Es sey von 6854345 die Zahl 2831024 abzuziehen.

Auflösung.

6854345 Minuend.
— 2831024 Subtrahend.
4023321 Differenz.

II. Die Zahl 7935429 werde von 47865793 abgezogen.

Auflösung.

47865793 Minuend.
— 7935429 Subtrahend.
39930364 Differenz.

III. Man subtrahire von 500037041 die Zahl 376950825.

Auflösung.

500037041 Minuend.
— 376950825 Subtrahend.
123086216 Differenz.

IV. Man subtrahire 457839 von der Zahl 438642.

Auflösung.

438642 Minuend.
— 457839 Subtrahend.
— 19197 Differenz.

V. Man nehme von 7403258 die Zahl 6475193.

VI. Von 10700463 ziehe man ab die Zahl 9477586.

Zusatz. Eine negative Größe ist gleich einer Differenz, in welcher der Minuend Null ist und der Subtrahend diese negative Größe.

Z. B. $-15 = 0 - 15$;
$-19197 = 0 - 19197$.

§. 16.

Anmerkung.

Beobachtet man bei der Additon die Regel Nro. 2 in §. 14, und bei der Subtraction Nro. 2, 3, 4 in §. 15, so kann man richtig zusammenzählen und richtig abziehen, wenn auch die Zahlen nicht lothrecht unter einander, wie Nro. 1 in §. 14 und §. 15 fordern, sondern wagerecht, d. i. in derselben Linie stehen. Wenn in letzterer Art die Größen angeschrieben sind, so fordert die Operation (bei der Addition und Subtraction) mehr Aufmerksamkeit, und führt denjenigen, der sich bald an sie gewöhnt, zu der Ordnung, welche bei Gleichungen (im engern Sinne) und bei arithmetischen Proportionen beobachtet werden soll.

Beispiele.

I. Man addire die Zahlen 7543; 846; 1358; 695074.

Auflösung.

$7543 + 846 + 1358 + 695074 = x.$

$704821 = x.$

II. Man summire 430765; 1853; 59638; 37; 631.

Auflösung.

$$430756 + 1853 + 59638 + 37 + 631 = x.$$
$$492915 = x.$$

III. Man nehme von 43073 die Zahl 28465.

Auflösung.

$$43072 - 28465 = x.$$
$$14607 = x.$$

IV. Man subtrahire von 6310492 die Zahl 5731594.

Auflösung.

$$6310492 - 5731594 = x.$$
$$578898 = x.$$

§. 17.

Addition und Subtraction der mehrgliedrigen Größen.

1) Wenn eine zusammengesetzte Größe (aus positiven und negativen Gliedern bestehend) zu einer andern addirt werden soll, so kann man

a) entweder die in den Klammern stehenden Glieder in eins zusammenziehen und dieses eine Glied nach Forderung seiner Qualität mit dem andern Summanden verbinden; oder

b) man kann die Klammern weglassen, und die Glieder so behandeln, als wenn die Klammern nie vorhanden gewesen wären. — Wenn das Additionszeichen (+) einer Parenthese vorsteht, so ändern die eingeschlossenen Größen durch die Auflösung der Parenthesen ihre Zeichen nicht. — Z. B.

I. $7 + (6 + 3) = 7 + 6 + 3$; oder
$7 + (6 + 3) = 7 + 9 = 7 + 6 + 3 = 16.$

II. $9 + (8 - 6) = 9 + 8 - 6$; oder
$9 + (8 - 6) = 9 + 2 = 9 + 8 - 6 = 11.$

III. $18 + (4 - 9) = 18 + (-5) = 18 - 5 = 13$ oder
$18 + (4 - 9) = 18 + 4 - 9 = 22 - 9 = 13.$

2) Wenn eine zusammengesetzte Größe von einer andern Größe subtrahirt werden soll, so kann man

a) entweder die in Klammern stehenden Glieder in eines zusammenziehen und dieses eine Glied mit dem Minuenden verbinden, oder

b) man kann die Klammern hinweglassen, indem man den in den Parenthesen stehenden Gliedern die entgegengesetzten Qualitätszeichen gibt, welche sie in den Klammern hatten, und sie dann nach ihren vorstehenden Zeichen mit dem Minuenden verbindet. — Wenn das Subtractionszeichen (—) einer Parenthese vorsteht, so müssen bei der Auflösung der Parenthese die eingeschlossenen Glieder in den entgegengesetzten Werth gesetzt, d. i. die positiven Glieder müssen in negative, und die negativen in positive verwandelt werden. Z. B.

I. Man ziehe $4 + 3 + 5$ von 17 ab.

Auflösung.

$17 - (4 + 3 + 5) = x;$
$17 - 4 - 3 - 5 = x;$
$17 - 12 = x;$
$5 = x.$

Nach der Aufgabe heißt es, es soll von 17 die aus $4 + 3 + 5$ $(= 12)$ entstandene abgezogen werden; es ist aber gleich, ob die Summe auf einmal oder nach und nach weggenommen werde.

II. Man ziehe von 13 die Größe $12 - 5$ ab.

Auflösung.

$13 - (12 - 5) = x;$
$13 - 12 + 5 = x;$
$13 + 5 - 12 = x;$
$18 - 12 = x;$
$6 = x.$

Die Aufgabe heißt, es soll von 13 die Differenz zwischen $12 - 5$ $(= 7)$ abgezogen werden; das ist, nicht 12, sondern 12 weniger 5 soll weggenommen werden. Will man aber 12 wegnehmen, so hat man vorher zu 13 noch 5 zu geben, um die in der Aufgabe verlangte Größe zu erhalten.

III. Von 11 ziehe man $5 - 3 + 6$ ab.

Auflösung.

$$11 - (5 - 3 + 6) = x;$$
$$11 - 5 + 3 - 6 = x;$$
$$11 + 3 - 5 - 6 = x;$$
$$14 - 11 = x;$$
$$3 = x.$$

IV. Von $23 + 19$ ziehe man $13 - 6 + 8 - 11 + 15$ ab.

Auflösung.

$$23 + 19 - (13 - 6 + 8 - 11 + 15) = x;$$
$$23 + 19 - (36 - 17) = 23 + 19 - 19 = 23; \text{ oder}$$
$$23 + 19 - 13 + 6 - 8 + 11 - 15 = x;$$
$$23 + 19 + 6 + 11 - 13 - 15 - 8 = x;$$
$$59 - 36 = 23.$$

V. Von $37 - 15$ soll $(28 - 19 + 11 - 8)$ und 4 abgezogen werden.

Auflösung.

$$37 - 15 - (28 - 19 + 11 - 8) - 4 = x;$$
$$22 - (39 - 27) - 4 = 18 - 12 = 6; \text{ oder}$$
$$37 - 15 - 28 + 19 - 11 + 8 = 4 = x;$$
$$64 - 58 = 6.$$

VI. Von 23 ziehe man ab $(27 - 32)$ und $(19 - 21)$.

Auflösung.

$$23 - (27 - 32) - (19 - 21) = x;$$
$$23 - (-5) - (-2) = 23 + 5 + 2 = 30; \text{ oder}$$
$$23 - 27 + 32 - 19 + 21 = 76 - 46 = 30.$$

Zur Uebung.

VII. $(13 - 21 + 19) - (17 - 13 + 15 - 8) = x.$

VIII. $47 - 31 + (16 - 11 - 6) - 8 - (9 - 17) = x.$

IX. $63 + (22 - 36) - (18 - 33) - 11 = x.$

Zusatz. Wenn mehrere Größen als eine betrachtet in einer Parenthese, welcher das Subtractionszeichen vorausgehet, gesetzt werden sollen, so müssen sie von den Qualitätszeichen, welche sie außer der Parenthese haben, die entgegengesetzten bekommen.

§. 18.

Probe.

Die Addition und Subtraction sind einander entgegenge-

setzt §. 8. 3., und dienen sich gegenseitig zur Probe; d. i. als Prüfungsmittel für die Richtigkeit der Rechnung.

I. Ueber die Addition wird die Probe gemacht:

1) Wenn man von der gefundenen Summe jeden einzelnen Summanden abzieht. Bleibt kein Rest, so ist wahrscheinlich richtig addirt worden; z. B.

Man mache über die Auflösung des I. Beispieles §. 14 die Probe.

Auflösung.

Man ziehe von 37694 nach einander ab 4132; 75; 697; 32790.

$$37694 - 4132 = x;$$
$$33562 = x;$$
$$33562 - 75 = x';$$
$$33487 = x';$$
$$33487 - 697 = x'';$$
$$32790 = x'';$$
$$32790 - 32790 = x.$$

2) Nach Anweisung des §. 15.

II. Ueber die Subtraction wird die Probe gemacht, daß man den Rest zum Subtrahend addirt. Ist kein Fehler in der Subtraction vorgefallen, so wird der Minuend als Summe erscheinen. Z. B.

Man mache die Probe über die Auflösung des I. Beispieles §. 15.

Auflösung.

$$2831024 + 4023321 = x;$$
$$6854345 = x.$$

§. 19.

Multiplication (§. 9. c).

Sätze.

Vor Aufstellung von Regeln für die Multiplication ist zu merken Folgendes:

1) Bei der Multiplication hat man auf die Zeichen (oder auf den positiven und negativen Werth der Factoren zu sehen; denn durch sie wird das Zeichen des Produktes bestimmt.

Es geben nämlich

a) zwei positive Factoren mit einander vermehrt, ein positives Produkt; z. B.

$$4 \times 7 = +4 \times +7 = +28;$$

b) zwei negative Factoren, mit einander vermehrt, ein positives Produkt; z. B.

$$-4 \times -6 = +24;$$

c) ein positiver Factor, mit einem negativen vermehrt, gibt ein negatives Produkt; z. B.

$$-4 \times +7 = -28.$$

* Signa eadem dant plus, signa diversa minus.

2) Das Produkt wird

a) um so größer, je größer die Factoren sind,

b) um so kleiner, je kleiner die Factoren sind.

3) Eine Zahl mit 0 multipliciren heißt, sie keinmal nehmen; daher ist das Produkt auch aus 0 und einer Zahl $= 0$; z. B.

$$6 \times 0 = 0;$$
$$0 \times 7 = 0;$$

4) Eine Zahl mit 1 multipliciren heißt, sie einmal setzen oder unverändert lassen; z. B.

$$7 \times 1 = 6;$$
$$23 \times 1 = 23;$$
$$64 \times 1 = 64;$$
$$312 \times 1 = 312;$$
$$2799 \times 1 = 2799 \text{ u. dgl.}$$

Zusatz. Jede Zahl kann angesehen werden als ein Produkt aus 1 und sich selber; z. B.

$$7 = 7 \times 1 = 1 \times 7;$$
$$13 = 13 \times 1 = 1 \times 13.$$

5) Eine Zahl mit 10, 100, 1000 ꝛc. multipliciren heißt, von ihr das Zehn-, Hundert-, Tausendfache ꝛc. nehmen, und geschieht, wenn man ihr 1, 2, 3 Nullen anhängt. Denn dadurch rücken alle Ziffern um 1, 2, 3 ꝛc. Stellen und erhalten einen 10-, 100-, 1000fach höhern Werth. Z. B.

$$16 \times 10 = 160;$$
$$99 \times 10 = 990;$$
$$502 \times 100 = 50200;$$

579 × 1000 = 579000;
7000 × 10000 = 70000000 u. s. f.

Zusatz. Jede ganze Zahl, welche rechts Nullen hat, kann man auflösen in zwei Factoren, von denen der eine die Zahl ohne Nulle, und der andere die Zahl aus Eins (1) mit so viel Nullen ist, als die Zahl Nullen hat. Z. B.

486000 = 486 × 1000;
573100 = 5731 × 100.

§. 20. Aufgaben.

Eine Zahl mit einer andern zu multipliciren.

I. Aufgabe.

Alle Produkte zu finden, welche entstehen, wenn man irgend zwei der Einer mit einander multiplicirt.

Auflösung.

1) Man schreibe die Zahlen von 1 bis 9 in die wagerechte Reihe A B.
2) Nun setze man unter jede Ziffer ihr Doppeltes in die Reihe C D. (Dieses geschieht, indem man jede Ziffer in A B zu sich selbst addirt);
3) ferner ihr Dreifaches, (welches entsteht, indem man die Ziffer der Reihe C D zu jener in A B addirt) in die Reihe E F;
4) nun das Vierfache (welches man durch Summiren des Dreifachen und Einfachen erhält) in die Reihe von G H; und
5) fahre man auf diese Art immer weiter fort, bis in R S das Neunfache gesetzt wird.

So ist die Aufgabe gelöst; alle Mehrfachen von 1 bis 9 sind durch wiederholte Addition zusammengesetzt.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9 B
C	2	4	6	8	10	12	14	16	18 D
E	3	6	9	12	15	18	21	24	27 F
G	4	8	12	16	20	24	28	32	36 H
I	5	10	15	20	25	30	35	40	45 K
L	6	12	18	24	30	36	42	48	54 M
N	7	14	21	28	35	42	49	56	63 O
P	8	16	24	32	40	48	56	64	72 Q
R	9	18	27	36	45	54	63	72	81 S

* Die Sammlung aller Produkte aus irgend zwei Ziffern der Zahlen von 1 bis 9 heißt das Einmaleins oder die pythagoreische Tafel.

II. Aufgabe.

Eine gegebene Zahl durch eine einziffrige Zahl zu multipliciren.

Auflösung.

Man multiplicire von der Einerstelle gegen die Zehnerstelle alle Ziffern des Multiplicands, und setze das Produkt, wenn es einziffrig ist, genau an die Stelle, von der es herrührt. Besteht aber das erhaltene Produkt aus zwei Ziffern, so setze man nur die Einer desselben, wie bei der Addition, an dieselbe Stelle, und addire die Zehner jenes Produktes zum folgenden Faktum. Ist dieses 10, 20, 30 ... oder 0, so kommen die vom vorigen Produkte gebliebenen Zehner an die Stelle der Nulle.

Beispiele.

I. Es werde die Zahl 34213 mit 2 multiplicirt.

Auflösung.

Multiplicand.		Multiplicator.		Produkt.
34213	×	2	=	68426.

II. Die Zahl 4789 soll mit 6 multiplicirt werden.

Auflösung.

Multiplicand.		Multiplicator.		Produkt.
4789	×	6	=	28734.

III. Man multiplicire 6847392 mit 5.

Multiplicand.		Multiplicator.		Produkt.
6847392	×	5	=	34236960.

IV. 6050382941 werde mit 7 multiplicirt.

Multiplicand.		Multiplicator.		Produkt.
6050382941	×	7	=	42352680587.

Wenn eine einzige der neun arabischen Ziffern Nullen rechts hat, und mit dieser Größe eine gegebene Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicire man mit dieser einzigen Ziffer die Zahl und hänge sogleich dem erhaltenen Produkte so viele Nullen an, als die Ziffer Nullen bei sich hat. Durch dieses Verfahren wird der eine Factor (nach §. 19, 5. Zus.) aufgelöst; dann wird mit einem seiner Factoren, als mit einer einziffrigen Größe, und noch mit dem andern seiner Factoren, mit 10; 100; 1000 ... (nach §. 19, 5) multiplicirt.

Beispiel.

Man multiplicire 47238 mit 3000.

$47238 \times 3000 = 141714000$; denn

$47238 \times 3000 = 47238 \times 3 \,.\, 1000 =$

$141714 \times 1000 = 141714000$.

III. Aufgabe.

Eine Zahl, welche aus mehreren Ziffern besteht, mit einer andern mehrziffrigen Zahl zu multipliciren oder was immer für zwei ganze Zahlen miteinander zu multipliciren.

Auflösung.

Man unterscheide hier zwei Auflösungsarten:

I. die (der Kürze wegen) gewöhnlich gebrauchte (aber oft mechanische), und

II. eine den Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens in sich haltende.

I.

Regel für die erste Art.

1) Man multiplicire alle Ziffern des einen Factors durch jede einzelne Ziffer des andern Factors nach Aufgabe II. Das Produkt aus jeder Ziffer des einen Factors in den ganzen andern Factor heißt Partialprodukt oder Theilprodukt.

2) Die erhaltenen Partialprodukte setze man nach dem Gesetze der Gleichnamigkeit unter einander, indem man den Localwerth des Multiplicators ebenfalls immer berücksichtigt. Die Summe der erhaltenen Partialprodukte ist das verlangte Hauptprodukt.

* Es ist also einerlei, mit welcher Stelle des Multiplicators man zuerst multiplicirt, und in welcher Ordnung man die Partialprodukte erzeugen will, sobald man nur den Stellenwerth der Ziffer berücksichtigt.

3) Kommen im Multiplicator Nullen vor, so überspringt man sie (§. 19, 3.) und multiplicirt also bloß mit den bedeutenden Ziffern.

4) Hat der eine oder andere Factor, oder haben beide zugleich rechts Nullen, so multiplicire man so, als wenn die Nullen gar nicht vorhanden wären, und hänge dem gefundenen Produkte rechts so viele Nullen an, als in beiden Factoren zugleich vorhanden sind (§. 19, 5.).

5) Wenn eine mehrgliedrige Zahl mit einer andern Zahl

multiplicirt werden soll, so multiplicire man mit der Zahl jedes Glied der mehrgliedrigen und addire die Partialprodukte; wenn eine mehrgliedrige Größe mit einer mehrgliedrigen multiplicirt werden soll, so multiplicire man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern mehrgliedrigen Größe und addire die Partialprodukte.

Beispiele.

I. Man multiplicire 4235 mit 65.

Auflösung.

Factoren. Produkt.
4235 × 65 = x.

a) 21175
+ 25410. } Theilprodukte.
275275 = Hauptprodukt (Produkt).

b) 25410.
+ 21175 } Theilprodukte.
275275 = Hauptprodukt (Produkt).

II. Man multiplicire die Zahl 57024 mit 453.

Auflösung.

Factoren. Produkt.
57024 × 454 = x.

a) 171072
+285120.
+228096.. } Theilprodukte.
25831872 = Produkt.

b) 228096..
+ 285120.
+ 101072 } Theilprodukte.
25831872 = Produkt.

III. Man multiplicire 6754219 mit 54763.

Auflösung.

Factoren. Produkt.
6754219 × 54763 = x.

a) 20262657
+ 40525314.
+ 47279533..
+ 27016876...
+ 33771095.... } Partialprodukte.
369881295097 = Produkt.

b) 33771095....
+ 27016876...
+ 47279533..
+ 40525314.
+ 20262657
} Theilprodukte.

369881295097 = Produkt.

* In diesen drei Beispielen wurde zuerst a. mit den Zahlen niederer Ordnung zu vermehren angefangen, dann wurde b. mit den Zahlen der höchsten Ordnung zu multipliciren begonnen. Wenn die Theilprodukte zusammengezählt wurden, war das Produkt immer dasselbe. Dasselbe Produkt erhielte man, wenn man mit was immer für einer Ordnung zu vermehren beginnen würde, wenn nur die Theilprodukte richtig gefunden und richtig addirt werden.

Nachweis aus Beispiel III.

v.II.III.I.IV.
6754219 × 5 4 7 6 3 = x.

405253140	=	60	× 6754219.
+ 27016876000	=	4000	
+ 4727953300	=	700	
+ 20262657	=	3	
+ 337710950000	=	50000	
369881295097	=	Produkt.	

IV. Es werde 573100 mit 486000 multiplicirt.

Auflösung.

573100 × 486000 × x.

3438600000
+ 45848......
+ 22924.......
} Theilprodukte.

278526600000 = Produkt.

V. Es soll 16 mit (7 + 9 + 5) multiplicirt werden.

Auflösung.

16 (7 + 9 + 5) = x;
112 + 144 + 80 = x;
336 = x.

VI. Man multiplicire (5 + 7 + 8) mit (9 + 6 + 3).

Auflösung.

(5 + 7 + 8) × (9 + 6 + 3) = x
(45 + 63 + 72) + (30 + 42 + 48) + (15 + 21 + 24) = x
180 + 120 + 60 = 360.

* Gewöhnlich werden in ähnlichen Beispielen, wie die zwei letz-

teren sind, die mehrgliedrigen Größen in eingliedrige verwandelt und als solche multiplicirt.

II.

Regel für die zweite Art.

Man zerlege den einen der zu multiplicirenden Factoren in jene Summanden, aus welchen er der Dekadik nach besteht. Hiedurch erhält man eine mehrgliedrige Größe, in welcher die Glieder verschiedenen Ordnungen angehören. Man multiplicire dann mit jedem Gliede der mehrgliedrigen Größe den andern Factor, und addire die Partialprodukte.

I. Man multiplicire 365 mit 7492.

Auflösung.

$$365 \times 7492 = x;$$

$$365 \times 7492 = (300 + 60 + 5) \,.\, 7492;$$

Theilprodukte. Produkt.

$$\underbrace{2247600 + 449520 + 37460} = 2734580$$

II. Man multiplicire 4763 mit 58920.

Auflösung.

$$4763 \times 58920 = x;$$

$$4763 \times 58920 = (4000 + 700 + 60 + 3) \times 58920;$$

$$23568000 + 41244000 + 3535200 + 176760 = x;$$

$$280635960 = x.$$

§. 21.

Division (§. 8. d.).

Sätze.

1) Bei der Division hat man auf das Zeichen (§. 9. c. α), welches der Quotus enthalten muß, zu sehen.

a) Plus (+) erhält der Quotus:

α) wenn das Dividend und der Divisor plus (+) haben,

β) wenn das Dividend und der Divisor minus (—) haben.

b) Minus (—) bekömmt der Quotus:

α) wenn das Dividend plus (+) und der Divisor minus (—) hat,

β) wenn das Dividend minus (—) und der Divisor plus (+) hat.

2) Der Quotus (§. 8. d.) wird

a) um so größer, je kleiner der Divisor ist;

b) um so kleiner, je größer der Divisor ist.

3) Eine Zahl durch Null (0) getheilt gibt unendlich Großes (∞).

4) Jede Zahl kann als ein Produkt aus sich selbst in die Einheit betrachtet werden (§. 19. 4. Zus.). Es muß daher jede Zahl

a) durch sich selbst getheilt die Einheit,

b) durch die Einheit getheilt sich selbst zum Quotus geben.

Z. B. a) $7 : 7 = 1$;

b) $7 : 1 = 7$.

5) Eine Zahl wird durch 10; 100; 1000 getheilt, wenn man von der Rechten gegen die Linke, 1; 2; 3; .... Ziffern abschneidet. Die links stehenden Ziffern bilden den Quotienten, und die abgeschnittenen den Rest, der durch den gegebenen Divisor noch zu theilen ist. Z. B.

$$362800 : 10 = 36280;$$

$$362800 : 100 = 3628;$$

$$362800 : 1000 = 362 + \frac{8}{10}.$$

* In den Dezimalbrüchen wird dieser Satz und der ähnliche §. 19. 5 öfters angewendet; es ist dort 362800 : 1000 = 362 · 8.

§. 22.

Aufgabe.

Eine Zahl durch eine andere Zahl zu dividiren.

I. Aufgabe.

Eine gegebene Zahl durch eine einzifferige Zahl zu dividiren.

Auflösung.

Ist das Dividend nur ein- oder zweizifferig, so ist der Quotient schon aus dem Einmaleins bekannt (§. 20. I. Aufg.); vorausgesetzt, daß das Dividend durch den Divisor theilbar ist.

Besteht das Dividend aus mehrern Ziffern, so kann man zweierlei Auflösungsarten benützen, nämlich

I. die gewöhnliche — mehr mechanische — und

II. eine den Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens in sich haltende.

I.

Regel für die gewöhnliche Auflösung.

1) Man untersuche, wie oft der Divisor in der höchsten

Ziffer des Dividends, oder wenn dieser kleiner als der Divisor ist, in den zwei höchsten Ziffern desselben enthalten sey. Die Zahl, die dieses anzeigt, ist die erste (höchste) Ziffer des Quotienten. Mit diesem gefundenen Partialquotienten multiplicire man den Divisor und ziehe das Produkt von jener Ziffer (oder jenen zwei Ziffern) des Dividends ab.

2) Zum gefundenen Reste setze man die nächstniedere Ziffer des Dividends herab, und dividire diese Zahl wieder durch den gegebenen Divisor, so erhält man die zweite Ziffer des Quotienten. Das Produkt aus diesem in den Divisor ziehe man wieder von der Zahl ab, welche man dividirt hat, und füge dem gefundenen Reste ebenfalls die nächstfolgende Ziffer des Dividends zur Rechten bei, wodurch man das neue Dividend erhält. — Auf diese Art setze man das Verfahren fort, bis alle Ziffern des Dividends nach und nach heruntergesetzt worden sind.

3) Sollte irgendwo das Produkt aus dem gefundenen Partialtheile des Quotienten in den Divisor gleich seyn dem gebrauchten Dividende, und also ein Rest $= 0$ gefunden werden, so setzt man die nächst niedere Ziffer des Dividends allein herab, und dividirt, wie vorhin gesagt wurde. Wäre aber diese Ziffer des Dividends kleiner als der Divisor, so ist der Partialquotient $= 0$, welche im Quotient angesetzt werden muß, und dann schreibt man noch die nächste Ziffer des Dividends herab und dividirt diese zweizifferige Zahl nach vorgeschriebener Art.

4) Eine mehrgliedrige Zahl wird durch eine einzifferige dividirt, wenn man jedes Glied dividirt und die erhaltenen Theilquotienten durch die Zeichen der Glieder verbindet.

Bleibt bei der Subtraction, wenn die letzte Ziffer des Dividends schon herabgesetzt worden ist, kein Rest, so ist dieß ein Zeichen, daß der Divisor genau im Dividend enthalten ist; bleibt aber ein Rest, der immer kleiner seyn muß als der Divisor, so gibt der gefundene Quotient, mit dem Divisor multiplicirt, ein Produkt, welches, um den genannten Rest vermehrt, dem Dividend gleich wird. — Es muß also zu dem gefundenen Quotient noch etwas gegeben werden, welches aber keine ganze Einheit mehr betragen kann und

daher eine gebrochene Zahl oder ein Bruch ist. Dieser wird dadurch bezeichnet, daß man unter jenen Rest den Divisor setzt und durch einen Strich absondert. —

Beispiele.

I. Man theile 7729443 durch 3.

Auflösung.

Dividend : Divisor = Quotus.

7729443 : 3 = 2576481.

```
—6
 17
—15
  22
 —21
   19
  —18
    14
   —12
     24
    —24
       3
      —3
       0
```

II. Man dividire 32889661 durch 7.

Auflösung.

32889661 : 7 = 4698523.

```
—28
  48
 —42
  68
 —63
   59
  —56
    36
    35
    16
   —14
     21
    —21
      0
```

III. Man theile durch 5 die Zahl 29753985.

Auflösung.

```
29753985 : 5 = 5950797.
—25
 47
—45
  25
 —25
   39
  —35
    48
   —45
     35
    —35
      0
```

IV. Die Zahl 54632714 werde getheilt durch 9.

Auflösung.

```
54632714 : 9 = 6070301 + 5/9
—54
  63
 —63
   27
  —27
    14
    —9
     5
```

V. Man theile (84 — 49 + 35 — 21) durch 7.

Auflösung.

$$(84 - 49 + 35 - 21) : 7 = x;$$

$$12 - 7 + 5 - 3 = 17 - 10;$$

$$= 7.$$

Um das viele Anschreiben zu ersparen, gewöhne man sich an, die Produkte aus den gefundenen Partialquotienten in den Devisor gleich in Gedanken abzuziehen. Man bemerkt den Rest oberhalb oder unterhalb der entsprechenden Ziffer des Dividends. Z. B.

I. Man dividire 469852 durch 4.

Auflösung.

```
 2.1.2.1.
469852 : 4 = 117463.
```

II. Man theile 257648 durch 8.

Auflösung.

257648 : 8 = 32206.
11

II.

Regel zur zweiten Auflösungsart.

1) Man untersuche, wie oft der Divisor in der höchsten Ziffer, oder, wenn diese kleiner als der Divisor ist, in den zwei höchsten Ziffern des Dividends enthalten sey. Dieser Zahl, welche dieses anzeigt, gebe man so viele Nullen zur Rechten, als viele Ziffern außer der eben getheilten Größe im Dividende noch enthalten sind, und so hat man den ersten Theilquotus. Mit diesem gefundenen Partialquotienten multiplicire man den Divisor und ziehe das Produkt vom Dividend ab.

2) Den erhaltenen Rest theile man wieder wie das Dividend, und verbinde durch Addition den zweiten Theilquotus mit dem ersten; multiplicire diesem Theilquotus mit dem Divisor und ziehe dieses Produkt wieder vom Reste ab. — Auf diese Art setze man das Verfahren fort, bis kein Rest, oder ein kleinerer als der Divisor bleibt.

Beispiele.

I. Man theile 19458 durch 6.

Auflösung.

19458 : 6 = x;

$$
\begin{array}{r|l}
19458:6 & = 3000 + 200 + 40 + 3; \\
-18000 & = 3243. \\
\hline
1458:6 & \\
-1200 & \\
\hline
258:6 & \\
-240 & \\
\hline
+18:6 & \\
-18 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

II. Man dividire 75349168 durch 8.

Auflösung.

75349168 : 8 = 9000000 + 400000 + 10000 + 8000 + 600 + 40 + 6;
= 9418646.

−72000000
3349168
−3200000
149168
−80000
69168
−64000
5168
−4800
368
−320
48
−48
0

II. Aufgabe.

Eine gegebene mehrzifferige ganze Zahl durch eine andere mehrzifferige Zahl zu dividiren.

Auflösung.

1) Man schneide im Dividende von der Linken gegen die Rechte so viele Ziffern ab, als nöthig sind, daß der Divisor wenigstens einmal in demselben enthalten sey. Zuerst schneidet man im Dividende so viele Ziffern ab, als der Divisor Stellen hat, wo sich dann durch bloße Vergleichung zeigt, ob der Divisor in den abgeschnittenen Ziffern enthalten sey oder nicht. Im letzten Falle schneidet man noch eine Ziffer mehr im Dividende ab. — Aus der Benennung, d. i. aus dem Lokalwerthe der ersten Stelle des Quotienten, erkennt man immer, aus wie viel Ziffern der Quotient bestehe. Kommt z. B. bei der ersten Division die Stelle der Einheiten des Divisors unter die Stelle der Tausende des Dividends, so fängt auch der Quotient mit Tausend an oder der Quotient besteht aus 4 Ziffern.

2) Nun untersuche man, wie oft der Divisor in der links abgeschnittenen Zahl enthalten sey. — Hiebei erleichtert man sich die Arbeit dadurch, daß man versucht, wie oft die höchste

Ziffer des Divisors in der höchsten oder in den zwei höchsten Ziffern des Dividends enthalten sey. Die Ziffer, welche dieß angibt, ist die erste (höchste) Stelle des Quotienten. Diese erste Zahl des Quotienten hat denselben Lokalwerth, welchen die niedrigste abgeschnittene Stelle des Dividends hat. —

3) Das Produkt aus der ersten gefundenen Zahl des Quotienten in den ganzen Divisor ziehe man dann von den im Dividende abgeschnittenen Stellen ab, und setze zum Reste die nächste Ziffer des Dividends herab, so bekömmt man das zweite Partialdividend.

4) Nun untersuche man, wie oft in diesem neuen Dividende der Devisor enthalten sey, und bemerke sich die Zahl, welche dieß angibt, als zweite Ziffer des Quotienten. Das Produkt aus dieser Ziffer des Quotus in den ganzen Divisor ziehe man vom letzten Dividende ab, so bildet der Rest mit der nächst herabzunehmenden Stelle des Dividends das neue Partialdividend. — Die nämliche Operation wiederhole man so lange, bis man alle Ziffern des Dividends nach und nach herabgesetzt hat.

5) Sollte das Partialdividend einmal kleiner seyn, als der Divisor, so schreibe man im Quotienten eine Null, und setze gleich die nächste des Dividends zum vorigen Partialdividende herab.

* Ist der Divisor genau im Dividende enthalten, so darf am Ende kein Rest bleiben; im entgegengesetzten Falle aber bleibt ein Rest, der aber immer kleiner seyn muß, als der Divisor.

** Zeigt sich irgendwo, daß das Produkt aus der genommenen Zahl, für den Quotienten, in den Divisor größer sey, als das Partialdividend, und daß es also von diesem nicht abgezogen werden kann, so gibt dieß an, daß man den Quotienten zu groß genommen habe, und daß man ihn also kleiner nehmen müsse. Bleibt aber nach der Subtraction jenes Produkts ein Rest, der noch größer als der Divisor ist, so gibt dieß an, daß man den Quotienten zu klein genommen habe, und daß man ihn daher größer nehmen müsse.

6) Haben Dividend und Divisor am Ende Nullen, so schneide man von beiden gleichviel Nullen ab, und dividire dann nach der gegebenen Vorschrift; denn dadurch wird der Quotient nicht geändert.

Beispiele.

I. Man theile 1020228 durch 243.

Auflösung.

1020228 = 4198 + 114
(243)   243.
—972
482
—243
2392
(243)
—2187
2058
(243)
—1944
114
243

II. Man dividire 20641032 durch 344.

Auflösung.

20641032 : 344 = 60003.
—2064
+1032
—1032
0

III. Durch 255 theile man 12755101785.

Auflösung.

12755101785 : 255 = 50020007.
—1275
510
—510
1785
—1785
0

IV. Es werde 17538602419 getheilt durch 3571.

Auflösung.

$$17538602419 : 3571 = 4911398 + \frac{1951}{3571}$$

```
17538602419 : 3571 = 4911398 + 1951/3571
—14284
 32546
—32139
   4070
  —3571
    4994
   —3571
    14232
   —10713
     35191
    —32139
      30529
     —28568
       1961
       ----
       3571
```

* Ganz auf ähnliche Weise, wie §. 22. I. Aufgabe II. könnte man auch hier theilen, um die Richtigkeit des Resultates leichter einzusehen. Z. B. man theile 1611015 durch 687.

Auflösung.

```
1611015 : 687 = 2000 + 300 + 40 + 5;
—1374000        = 2345.
  237015
 —206100
   30915
  —27480
    3435
   —3435
       0
```

§. 23.

Probe.

Wie Addition und Subtraction, so sind auch Multiplication und Division einander entgegengesetzt (§. 8), und dienen sich wechselseitig zur Probe.

1) Ueber die Multiplication wird die Probe gemacht, wenn man das gefundene Produkt durch einen der Factoren theilt, wo dann der andere Factor als Quotient erscheint. Z. B.:

I. Man mache die Probe über Beispiel I. §. 20. III. Aufgabe.

Auflösung.

275275 : 65 = 4235.
—260
152
—130
227
—195
325
—325
0

II. Es werde über das II. Beispiel §. 20. III. Aufgabe die Probe gemacht.

Auflösung.

25831872 : 453 = 57024.
—2265
3181
—3171
1087
—906
1812
—1812
0

2) Ueber die Division wird die Probe gemacht, wenn man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, und den bei der Division allenfalls gebliebenen Rest zu diesem Produkte addirt. Z. B.

I. Man mache die Probe über das Resultat des III. Beispiels §. 22.

Auflösung.

5950797 × 5 = 29753985.

II. Die Probe über das Resultat des III. Beispiels §. 22. II. zu machen.

Auflösung.

50020007 × 255 = 12755101785.

§. 24.

Rechnungsvortheile (§. 8*).

I. Für die Multiplication,

II. „ „ Division.

I.
Rechnungsvortheile bei der Multiplication ganzer Zahlen.

1) Die Multiplication mit dem Factor 11 läßt sich durch eine bloße Addition der Ziffern des Multiplicands von der Rechten zur Linken verrichten. Z. B.

I. $83 \times 11 = x.$

Auflösung.

Anstatt zu sagen

$$83 \times (10 + 1) = 830 + 83 = 913;$$

sagt man:

$$3 \text{ ist } 3;\ 3 + 8 = 11;\ 1 + 8 = 9;$$

wo immer nur die Einheiten der Summe im Produkte angesetzt, die Zehner aber zur nächsten Ziffer addirt werden.

II. $79 \times 11 = x;$

$869 = x.$

III. $5794 \times 11 = x;$

$63734 = x.$

IV. $473869 \times 11 = x;$

$5212559 = x.$

2) Anstatt mit 9; 99; 999; ... (oder auch 8; 98; 998; ... 7; 97; 967 ...) zu multipliciren, multiplicirt man kürzer mit der nächsten Rundzahl von 10; 100; 1000 ... d. i. man hängt dem Multiplicand 0; 00; 000 ... an; man muß aber von diesem Produkte das Ein= (Zwei= oder Drei=) fache des Multiplicands abziehen. Z. B.

$$5873 \times 9998 = x;$$

$$5873\ (10000 - 2) = x;$$

$$58730000 - 11746 = 58718254.$$

3) Sind alle Ziffern des Multiplicators, die höchste Stelle ausgenommen, lauter Neuner, so nehme man den Multiplicator um eine Einheit größer, verrichte mit diesem geänderten Factor die Multiplication, und ziehe von dem so erhaltenen Produkte den angegebenen Multiplicand ab. Z. B.

$$58479 \times 299 = x;$$

$$58479\ (300 - 1) = x;$$

$$17543700 - 58479 = 17485221.$$

Ist der Multiplicator mehrziffrig, und weicht seine Form

von der vorigen darin ab, daß die niedrigste Stelle mit einer von (9) Neun verschiedenen Ziffer besetzt ist; so verfährt man kurz auf ähnliche Art, wie vorhin. Z. B.

$$9351718 \times 39995 = x;$$
$$9351718\ (40000 - 5) = x;$$
$$37428720000 - 4678590 = 37424041410.$$

4) Anstatt durch 5; 25 oder 125 zu multipliciren, denke man sich dem Multiplicand 1, 2 oder 3 Nullen angehängt, und dividire dann durch 2, 4, oder 8, so ist der Quotient das verlangte Produkt. Z. B.

I. $7598 \times 5 = x;$
$$75980 : 2 = 37990.$$

II. $5743951 \times 25 = x;$
$$574395100 : 4 = 143598775.$$

III. $3479 \times 125 = x;$
$$3479000 : 8 = 434875.$$

5) Wenn der eine der Factoren (der Multiplicator) eine vielziffrige Zahl ist, in welcher zwei beisammen stehende Ziffern, als Zahl betrachtet, ein Vielfaches einer andern (beistehenden) Ziffer bilden, so geschieht die Multiplication schneller, indem man das aus dieser letztern in den Multiplicand gefundene Partialprodukt mit der Zahl multiplicirt, welche anzeigt, das Wievielfache jene zweiziffrige Zahl von jener andern Ziffer des Multiplicators sey. — Bei Anschreibung des Produktes hat man genau den Localwerth der Ziffern zu berücksichtigen. Z. B.

I. $7658 \times 357 = x;$
$$7658\ (350 + 7) = x;$$
$$(7658 \times 350) + (7658 \times 7) = x;$$
$$53606 + 2680300 = 2733906.$$

II. $63784 \times 497 = x;$
$$63784\ (7 + 490) = x;$$
$$446488 + 31254160 = 31700648.$$

III. $485 \times 763 = x;$
$$485\ (700 + 63) = x;$$
$$339500 + 30555 = 370055.$$

IV. $856 \times 954 = x;$
$$(800 + 56) \times 954 = x;$$
$$763200 + 53424 = 816624.$$

6) Wenn man mit einer Zahl zu multipliciren hat, die sich in Factoren zerlegen läßt, so multiplicirt man oft schneller mit diesen, und entgeht dadurch einer Gelegenheit, in der Addition der Partialprodukte zu fehlen, weil diese Addition erspart wird. Z. B.

I. $72 \times 583 = x;$

$583 \times 8 . 9 = 4664 . 9;$

$41976 = x.$

II. $325 \times 198 = x;$

$325 \times 11 . 9 . 2 = x;$

$3575 . 9 . 2 = 32175 . 2;$

$64350 = x.$

7) Wenn mehrere Factoren mit einander zu multipliciren sind, so ist es gleich,

a) ob man das Produkt von zweien sucht, und dieses multiplicirt mit dem dritten Factor, dann das erhaltene Resultat mit dem vierten u. s. w.; oder

b) ob man je zwei oder drei Factoren mit einander vermehrt, und die erhaltenen Produkte von Neuem multiplicirt. Z. B.

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = x.$$

Auflösung.

a) $3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 12 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$

$60 \times 6 \times 7 \times 8 = 360 \times 7 \times 8$

$2520 \times 8 = 20160$; oder

b) $3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 12 \times 30 \times 56;$

$360 \times 56 = 20160.$

II.

Rechnungsvortheile bei der Division ganzer Zahlen.

1) Anstatt eine Zahl durch 5; 25; 125; ... zu dividiren, theile man sie lieber durch 10; 100; 1000; ... und multiplicire den Quotienten mit 2; 4; 8; ... je nachdem durch 5; 25; 125; ... zu dividiren war: weil

$$5 = \frac{10}{2}$$

$$25 = \frac{100}{4};$$

$$125 = \frac{1000}{8}; \ldots$$ ist. Z. B.

I. $635475 : 5 = x;$

$$\frac{635475 \times 2}{10} = \frac{127950}{10};$$

$$127095 = x.$$

II. $79438 : 5 = x;$

$$\frac{79438 \times 2}{10} = \frac{158876}{10};$$

$$15885\frac{6}{10} = x.$$

III. $47925 : 25 = x;$

$$\frac{47925 \times 4}{100} = \frac{191700}{100};$$

$$1917 = x.$$

IV. $34782 : 25 = x;$

$$\frac{34782 \times 4}{100} = \frac{139128}{100};$$

$$1391\frac{28}{100} = x.$$

V. $469750 : 125 = x;$

$$\frac{469750 \times 8}{1000} = \frac{3758000}{1000};$$

$$3758 = x.$$

VI. $54763 : 125 = x;$

$$\frac{54763 \times 8}{1000} = \frac{438104}{1000};$$

$$438\frac{104}{1000} = x.$$

2) Wenn der Divisor ein Produkt aus mehrern Factoren ist, so kann man mit den einzelnen Factoren des Divisors den Dividend theilen. Z. B.

I. $5640 : 168 = x;$

$$5640 : (21 . 8) = 705 : 21;$$

$$705 : (7 . 3) = 235 : 7;$$

$$235 : 7 = 33\tfrac{4}{7}.$$

II. $2264 : 1008 = x;$

$$22064 : (144 . 7) = 3152 : 144;$$

$$3152 : (36 . 4) = 788 : 36;$$

$$788 : (9 . 4) = 197 : 9;$$

$$197 : 9 = 21\tfrac{8}{9}.$$

3) Anstatt eine Zahl durch 99; 999; ... (oder durch 98; 998; ...) zu dividiren, kann man durch die nächste Rundzahl, d. i. durch 100; 1000; ... dividiren, welches durch ein bloßes Abschneiden der letzten Zifferstellen des Dividends geschieht; dann muß man aber am Ende das Einfache (Zweifache) des Quotus immer wieder zum Reste addiren, und auf ein Neues dividiren. Z. B.

I. 182556 : 99 = x;

Auflösung.

1825|56| = 1825;
    |-0|

56
+1825

18|81| = 18;
  |-0|

81
+18

99 : 99 : 1;
1825 + 18 + 1 = 1844.

II. 35405 : 97 = x;

Auflösung.

354|05| = 354;
   |-0|

5
+354 × 3 =
5 + 1062 = 10|67| = 10
             |-0|

67
+10 × 3 =
67 + 30 = 97;
97 : 97 = 1;
354 × 10 + 1 = 365.

* Die abgekürzte Multiplication und Division wird bei der Lehre von den Dezimalbrüchen besprochen werden.

B.

Von den angewandten Zahlen.

I. Artikel.

Von den angewandten oder benannten Zahlen (besonders unsers Vaterlandes).

AA. Erklärungen und Bestimmungen.

§. 25.

Erklärungen.

1) Benannte Zahlen sind Größen bestimmter Art; d. i. Größen, in welchen der Zahl zugleich die besondere Natur ihrer Einheiten beigegeben ist.

2) Unter die im gemeinen Leben am häufigst vorkommenden benannten oder angewandten Zahlen rechnet man die bestimmten Angaben der

Zeiteintheilungen,
Längen-, Flächen-, Körper- } Maaße,
Gewichte,
Münzen, und der
Gegenstände, welche blos gezählt werden.

§. 26.

Zeiteintheilungen.

1) Den Zeittheil, während welchem die Erde sich einmal um ihre Achse dreht, nennt man schlechthin einen Tag.

* (Tag und Nacht — arcus diurnus et nocturnus).

2) Die Dauer dieses Zeittheils ist nicht durch die Willkühr der Menschen bestimmt; darum ist der Tag eine natürliche (nicht willkührliche) Einheit zur Bestimmung der Zeit.

3) Durch die Willkühr der Menschen ist der Tag in Theile zerlegt, oder es ist eine bestimmte Anzahl von Tagen zusammen genommen, daher hat das bürgerliche Leben auch willkührliche Zeittheile.

4) Die Zeittheile des bürgerlichen Lebens sind entweder:

I. kleiner, als ein Tag, oder
II. größer, als ein Tag.

I.

Zeittheile, die kleiner sind als ein Tag.

Nach einer allgemeinen Annahme ist
der Tag eingetheilt in 24 Stunden (24^h),
die Stunde = = 60 Minuten (60′),
die Minute = = 60 Sekunden (60″),
die Sekunde = = 60 Tertien (60‴);
demnach ist

1 Tag = 24^h = 1440′ = 86400″ = 5184000‴,
1^h = 60′ = 3600″ = 216000‴,
1′ = 60″ = 3600‴, und
1″ = 60‴.

II.

Zeittheile, größer als ein Tag.

Zeittheile, größer als ein Tag, sind:

1) ein Jahr, d. i. der Zeittheil, während welchem die Erde ihre Bahn um die Sonne einmal durchläuft;
   a) ein gemeines Jahr, welches in sich faßt 365 Tage,
   b) ein Schaltjahr, = = = = 366 =
   c) ein Jahr überhaupt, = = = = 4 Quartale, = = = = 12 Monate oder = = = = 52 Wochen.

* Die Astronomen unterscheiden vom gemeinen Jahre noch
das Sonnenjahr = 365 Tg. 5 St. 48′ 51″ 6‴,
das siderische Jahr = 365 Tg. 6 St. 9′ 11″ und
das Mondjahr = 354 Tg. 8 St. 48′ 38″ 12″.

2) ein Quartal, welches in sich faßt 3 Monate;

* Die Zeittheile (gewöhnlich
von dem 20. März .... bis zu dem 21. Juni ....
= = 21. Juni .... = = = 23. Sept. ....
= = 23. Sept. .... = = = 21. Dzbr. ....
= = 21. Dzbr. .... = = = 20. März ....),
innerhalb welchen unsere Erde in der Bahn um ihre Sonne (Fig. I.) vom Frühlings=Aequinoctionspunkte T′ bis zum Sommer=Solstitalpunkte T″, von diesem bis zum Herbst=Aequinoctialpunkte T‴, von diesem bis zum Winter=Solstitialpunkte T und von diesem bis zum

Frühlings-Aequinoctialpunkte, sich bewegt, heißen die vier Jahreszeiten (Frühling, Sommer, Herbst und Winter).

Nach Tycho ist die Dauer

des Frühlings = 93 Tg. 4 St. 41′ 45″
des Sommers = 93 Tg. 13 St. 48′ 30″
des Herbstes = 89 Tg. 10 St. 44′ 15″
des Winters = 89 Tg. 0 St. 34′ 40″.

3) ein Monat, d. i. ein Zeittheil, während welchem die Sonne von einem Himmelszeichen (im Thierkreis) zum andern zu wandern scheint;

ein Monat (durchschnittlich) { 30 Tage oder 4 Wochen;

* Nur durchschnittlich wird ein Monat gleich 30 Tagen angenommen; denn das Sonnenjahr in 12 gleiche Theile zerlegt, gibt Sonnenmonate, von denen jeder 30 Tg. 10 St. 29′ 4″ 13‴ enthält. Die einzelnen Monate, mit der Zahl der Tage, welche ein jeder hat und mit ihrer Ordnungsziffer im Kalender sind:

I.	Januar	. . . . . .	mit 31	Tagen,
II.	Februar	im gemeinen Jahre . .	= 28	=
		im Schaltjahre . .	= 29	=
III.	März	. . . . . .	= 31	=
IV.	April	. . . . . .	= 30	=
V.	Mai	. . . . . .	= 31	=
VI.	Juni	. . . . . .	= 30	=
VII.	Juli	. . . . . .	= 31	=
VIII.	August	. . . . . .	= 31	=
IX.	September	. . . . . .	= 30	=
X.	October	. . . . . .	= 31	=
XI.	November	. . . . . .	= 30	=
XII.	December	. . . . . .	= 31	=

(Erklärung der Thierkreiszeichen im Kalender!)

** Der Monat, der seinen Namen von dem Monde hat, welcher in einem Jahre 13mal seinen Lauf um die Erde vollendet, wird unterschieden

als periodischer = 27 Tg. 7 St. 43′ 5″ und
als synodischer = 29 Tg. 12 St. 44′ 3″.

4) eine Woche (schlechthin), welche in sich hält 7 Tage,
= Arbeitswoche, = = = = 6 = ;

* Auf Gottes Befehl hat die Woche 6 Arbeitstage; und nach 6 Arbeitstagen soll der siebente dem Herrn geheiliget seyn. II. Mos. 20, 9—11.

** Die einzelnen Tage der Woche heißen:

Sonntag (dies Solis [☉]),
Mondtag (dies Lunae [☾]),
Dienstag (dies Martis [♂]),
Mittwoch (dies Mercurii [☿]),
Donnerstag (dies Jovis [♃]),
Freitag (dies Veneris [♀]),
Samstag (dies Saturni [♄]).
(Woher diese Benennungen.)

5) Jahrzehend, Jahrhundert, Jahrtausend, Menschenalter, u. dgl. m.

* Ein Menschenalter rechnet man $= \left(\begin{matrix} 30 \text{ oder} \\ (\frac{100}{3}) \end{matrix}\right)$ Jahren. Man darf annehmen, nach Ablauf von 30 Jahren bewohne unsre Erde wieder eine neue Generation; Christus, unser Heiland, der Menschensohn, hat $\frac{100}{3} = 33 \cdot 333$ Jahre ungefähr unsere Erde bewohnt.

§. 27.

Längenmaaße.

1) Wenn man den Bogen eines Meridians vom Aequator bis zum Nordpol unserer Erde (Fig. II. AN.), d. i. den nördlichen Erdquadranten in 34263120 gleiche Theile zerlegt, so ist jeder Theil so lange, als ein bayerischer Schuh oder Fuß (Fig. III.).

* Es verhält sich ein Meter zu einem bayer. Fuß wie 1 zu $0 \cdot 291859 \ldots$, daher ist ein Meter $= \frac{1000000}{291851} = 3 \cdot 4263120$ und es sind 10000000 Meters $= 34263120$ Fuß. Der Meter ist der zehnmillionteste Theil, daher der bayer. Fuß der 34263120ste Theil des nördlichen Meridianquadranten.

2) Der bayer. Fuß ist Grundeinheit oder Grundmaaß für alle hier folgende Längen-, Flächen- und Körper-Maaße, für Gewichte und Münzen.

* Fast allgemein ist der Fuß Grundeinheit für das Längenmaaß; doch die eigentliche Länge eines Fußes ist beinahe in jedem Lande eine andere.

3) Man hat von dem Fuß abgeleitete Längenmaaße,

I. die Theile des Schuhes sind, d. i. die kleiner sind, als ein Schuh, und

II. die mehrere Schuhe in sich fassen, d. i. die größer sind, als ein Schuh.

4) Derselbe Fuß wird bald in 10, bald in 12 gleiche Theile getheilt, daher hat man eine Eintheilung des Fußes

A. nach dem Dezimalmaaße, und
B. = = Duodezimalmaaße.

I.

Längenmaaße, welche kleiner sind, als ein Fuß, oder Eintheilung des Schuhes.

A. nach dem Dezimalmaaße:

Ein Fuß (1′) = 10 Zoll (10″),
ein Zoll = 10 Linien (10‴),
eine Linie = 10 Scrupel (10⁗); oder

1′ = 10″ = 100‴ = 1000⁗,
1‴ = 10⁗;

B. nach dem Duodezimalmaaße:

Ein Fuß = 12″,
ein Zoll = 12‴,
eine Linie = 12⁗; oder

1′ = 12″ = 144‴ = 1728⁗
1″ = 12‴ = 144⁗,
1‴ = 12⁗.

* Bei der Angabe der Höhe von Pferden zählt man nach Fäusten; 1 Faust = 4 Zoll.

II.

Längenmaaße, welche größer sind, als ein Fuß.

Eine Elle = 2′ 10″ 3‴ Duodz.
* Ein Stück Tuch = 30 Ellen,
12 Stücke = 1 Ballen,
22 Stücke = 1 Saum.
Eine Scheiterlänge = 3′ 6″ Duodz.
= Klafter (Klftr.) = 6′,
= Ruthe (1°) { Dezim. = 10′, Duodez. = 12′,
= Feldlänge = 200′,
= bayer. Chaussé-Stunde = 12703′,
= deutsche oder geograph. Meile = 25380′ (oder genauer = 25380·076′).

* * *

Bei Bestimmung der Längenmaaße kann gedacht werden an den Kreis; der Kreis wird eingetheilt in

360 Grade = 21600 Minuten = 1296000 Sekunden.
1° = 60′ = 3600″,
1′ = 60″.

§. 28.

Flächenmaaße.

1) Viereckige Flächen, welche von gleich langen, rechte Winkel einschließenden, Seiten begrenzt sind, nennt man Quadrate (Fig. IV.).

2) Ein Quadrat, in dem jede Seite einen Fuß lang ist, heißt ein Quadratfuß, oder Quadratschuh.

3) Für die Flächenmaaße ist der Quadratfuß Grundeinheit.

4) Der Quadratfuß kann

I. in kleinere Quadrate zerlegt werden, oder

II. er kann selber öfter in einer Quadratfläche enthalten seyn, in welchem Falle man Quadrate hat, die größer sind, als ein Quadratfuß.

5) Der Quadratfuß kann, wie der Längenfuß,

A. nach dem Dezimal=, oder

B. „ „ Duodezimalmaaße eingetheilt seyn.

I.

Quadrate, die kleiner sind, als ein Quadratfuß, oder Eintheilung des Quadratfußes,

A. nach dem Dezimalmaaße:

Ein Quadratfuß (□′) = 100 Quadratzoll (□″),
„ Quadratzoll = 100 Quadratlinien (□‴),
Eine Quadratlinie = 100 Quadratscrupel (□⁗);

1 □′ = 100 □″ = 10000 □‴ = 1000000 □⁗,
1 □″ = 100 □‴ = 10000 □⁗,
1 □‴ = 100 □⁗;

B. nach dem Duodezimalmaaße:

Ein □′ = 144 □″,
„ □″ = 144 □‴,
„ □‴ = 144 □⁗; das ist:

$1\,\square' = 144\,\square'' = 20736\,\square''' = 2985984\,\square''''$,

$1\,\square'' = 144\,\square''' = 20736\,\square''''$,

$1\,\square''' = 144\,\square''''$.

II.

Quadrate, die größer sind, als ein Quadratfuß.

Eine Quadrat=Klafter ($\square$ Klftr.) $= 36\,\square'$,

= = Ruthe ($\square°$) { Dezim. $= 100\,\square'$, Duodezim. $= 144\,\square'$,

Ein Tagwerk, Morgen und Jauchert $= 40000\,\square'$,

Eine deutsche Quadratmeile ($\square$ M.) $= 644144400\,\square'$.

§. 29.

Körpermaaße.

Man unterscheidet

I. Körpermaaße im engern Sinne, und

II. Hohlmaaße.

I.

Körpermaaße im engern Sinne.

1) Ein achteckiger, von sechs gleichen Quadraten begrenzter Körper ist ein Kubus oder Würfel (Fig. V.).

2) Ein Würfel, der einen Fuß lang, einen Fuß breit und einen Fuß hoch ist, ist ein Kubikfuß.

3) Für die Körpermaaße ist der Kubikfuß Grundeinheit.

4) Es gibt Würfel

I. die kleiner sind, als der Kubikfuß, also Theile desselben,

II. die größer sind, als der Kubikfuß, d. i. solche, in denen der Kubikfuß öfter enthalten ist.

5) Der Kubikfuß kann wie der Längenfuß und der Quadratschuh eingetheilt seyn

A. nach dem Dezimalmaaße, und

B. = = Duodezimalmaaße.

I.

Würfel, die kleiner sind, als ein Kubikfuß, oder Eintheilung des Kubikfußes.

A. nach dem Decimalmaaße,

1 Kubikfuß (c′) $=$ 1000 Kubikzoll (c″);

1 Kubikzoll (c'') = 1000 Kubiklinien (c''');

1 Kubiklinie (c''') = 1000 Kubikscrupel (c'''');

also auch:

1 c' = 1000 c'' = 1000000 c''' = 1000000000 c'''',

1 c'' = 1000 c''' = 1000000 c'''',

1 c''' = 1000 c.,''.

B. nach dem Duodezimalmaaße:

1 c' = 1728 c'',

1 c'' = 1728 c''',

1 c'' = 1728 c''''; also auch:

1 c' = 1728 c'' = 2985984 c''' = 5159780352 c'''',

1 c'' = 1728 c''' = 2985984 c'''',

1 c''' = 1728 c''''.

II.

Würfel, in denen der Kubikfuß öfter enthalten ist.

1 Kubikklafter (Klft. c) = 216 c',

1 Kubikruthe (c'') Dezim. = 1000 c',

detto Duodez. = 1728 c',

1 Kubikmeile (cm) = 16353460872000 c'.

* Der Kubikinhalt einer Klftr. Holzes ist = 126 c'.

II.

Hohlmaaße.

1) Zu den Körpermaaßen gehört auch das sogenannte Hohlmaaß.

2) Für die Hohlmaaße ist die Bestimmungseinheit der Kubikfuß.

3) Hohlmaaße sind:

I. die Maaße für Flüssigkeiten,

II. die Getreidmaaße, Mehlmaaße u. s. w.

I.

Maaße für Flüssigkeiten.

1) Um Flüssigkeiten zu messen, dient als Einheit die bayer. Maaßkanne, welche 43 bayer. Dezimalkubikzoll in sich faßt.

2) 64 Maaß geben einen bayer. Visireimer, d. i. 2752 bayer. Dezimalkubikzoll.

3) 60 Maaß geben den bayer. Schenkeimer, d. i. 2580 bayer. Dezimalkubikzoll.

4) Eine Tafel für Wein=. Bier= und Essigmaaße ist:

1 Eimer { 4 Viertel / 60 Maaß } (durchschnittlich)

1 Maaß = 2 Halbe oder 2 Seidel,

1 halbe Maaß = 2 Quartel,

1 Quartel = 2 Achtel,

oder:

Eim.	Vrtl.	Maaß.	Sdl.	Qt.	Achtl.
1 =	4 =	60 =	120 =	240 =	480
	1 =	15 =	30 =	60 =	120
		1 =	2 =	4 =	8
			1 =	2 =	4
				1 =	2

5) Ohm und Fuder sind Maaße für Weine.

1 Ohm = 2 Eimer,

1 Fuder (Fdr.) = 6 Ohm.

6) Der Kreis Pfalz (Rheinbayern) hat die Eintheilung:

1 Hectolitre = 10 Decalitres,

1 Decalitre = 10 Litres.

II.

Getreide= und Mehlmaaß.

1) Das für das Königreich vorgeschriebene Getreidemaaß ist das sogenannte Münchner=Schäffel.

2) Der kubische Inhalt dieser Maaßeinheit ist = 208 Maaß = 8 Kubikfuß 944 Dezimal=Kubikzoll, oder 8944 Duodezimal=Kubikzoll.

3) Dieses Maaß wird für alle Getreidarten gebraucht, und ist weiter eingetheilt, wie folgt:

1 Schäffel (Schfl.)	=	6 Metzen (Mtz.),
1 Metzen	=	2 halbe Metzen,
1 halber Metzen	=	2 Viertel (Vierl.),
1 Viertel	=	2 Achtel,
1 Achtel	=	2 Sechzehntel (Schztl.),
1 Sechzehntel	=	2 Dreißiger oder Mäßl,
1 Mäßl	=	2 halbe Dreißiger;

oder:

Schäff.	Metzen.	halb. Mtz.	Vierl.	Achtel.	Sechztl.	Dreißiger od. Mäßl.	halber Dreißig.
1 =	6 =	12 =	24 =	48 =	96 =	192 =	384
	1 =	2 =	4 =	8 =	16 =	32 =	64
		1 =	2 =	4 =	8 =	16 =	32
			1 =	2 =	4 =	8 =	16
				1 =	2 =	4 =	8
					1 =	2 =	4
						1 =	2

* Zum Kalkmessen hat man Muth, Schffl., Metzen.
1 Muth = 4 Schffl. = 24 Mtz.

§. 30.

Gewichte.

1) Viele Körper, die sich nicht bequem unmittelbar dem kubischen Inhalte nach bestimmen lassen, werden mittelbar durch das Gewicht bestimmt.

2) Gewicht im Allgemeinen ist der Druck, den ein Körper auf einen andern ausübt, der ihn vollkommen unterstützt.

3) Gewicht als Maaß ist ein Körper, der dazu dient, die Größe des Druckes angeben oder bestimmen zu können, den ein Körper auf seine Unterlage ausübt.

4) Der Druck, den das Regenwasser, welches ein hohler Würfel mit der Seite = 1′ 3″ und fast 2‴, (mit dem kubischen Inhalte von 2270772 Kubiklinien (Dezim. Maaß) in sich faßt, ist gleich dem Gewichte, das man einen Zentner nennt.

5) Durch den Zentner und seine Theile können alle Gewichte bestimmt werden.

6) Hier werden angegeben:

I. das Handelsgewicht,

II. das Apothekergewicht,

III. das Mark- oder Münzgewicht.

I.

Handelsgewicht.

Die Einheit für das Handelsgewicht ist der Zentner.

1 Zentner (Ztr.) = 100 Pfund (100 ℔.),

1 Pfund (℔.)	=	16 Unzen, 32 Loth (32 Lth.),
1 Loth	=	4 Quintel (4 Quint.),
1 Quintel	=	4 Pfenninggewicht,
1 Pfenninggew.	=	15 Gran;

also auch:

Ztr.	℔.	Unz.	Lth.	Quintl.	Pfggew.	Gran.
1 =	100 =	1600 =	3200 =	12800 =	51200 =	768000
	1 =	16 =	32 =	128 =	512 =	7680
		1 =	2 =	8 =	32 =	480
			1 =	4 =	16 =	240
				1 =	4 =	60
					1 =	15

* 20 Zentner = 1 Tonne,
2 Tonnen = 1 Last (bei Schiffsladungen).

** 1 Zentn. = 20 Ringe Draht, also
5 ℔. = 1 Ring.

*** 1 Karte Seide = 2 ℔.

II.

Apothekergewicht.

Nach allerhöchsten Gesetzen sollen 14 Apothekerpfunde gleich sein 9 Handelspfunden.

Das Apothekergewichtspfund wird getheilt in 12 Unzen:

1 Unze (℥)	wird	getheilt	in	2 Loth,
1 Loth	=	=	=	4 Quintl oder Drachma,
1 Drachma (ʒj)	=	=	=	3 Scrupel,
1 Scrupel (℈)	=	=	=	20 Gran.

III.

Mark= oder Münzgewicht.

1) Das Markgewicht, auch Kölner Mark, gebraucht man beim Münzwesen, beim Abwägen des Silbers und Goldes, und der davon gefertigten Sachen.

2) Silber und Gold werden nicht nach ℔, sondern nach Marken gerechnet.

3) Die Mark ist gleich $\frac{1}{2}$ ℔. Handelsgewicht.

4) Silber wird nach Loth, Gold nach Karat gerechnet.

5) Die Mark Silber hat 16 Loth.

6) Die Mark Goldes hat 24 Karat.

7) Die Eintheilung der Kölner Mark ist, wie folgt:

1 Mark = 8 Unzen,
1 Unze = 2 Loth,
1 Loth = 4 Quintl = $1\frac{1}{2}$ Karat,
1 Karat = $2\frac{2}{3}$ Quintl,
1 Quintl.** = 4 Pfenninge = $4\frac{1}{2}$ Gran,
1 Pfenning = $1\frac{1}{8}$ Gran = 17 Eschen (Aß).
1 Gran = $15\frac{1}{9}$ Eschen,
1 Eschen = $15\frac{1}{17}$ Richtpfenninge; also

Mark.	Unze.	Loth.	Karat.	Quentl.	Pfen.	Gran.	Eschen Aß.	Richt-Pfennig.
1	8	16	24	64	256	288	4352	65536
	1	2	3	8	32	36	544	8192
		1	$1\frac{1}{2}$	4	16	18	272	4096
			1	$2\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$	12	$118\frac{1}{3}$	$2730\frac{2}{3}$
				1	4	$4\frac{1}{2}$	68	1024
					1	$1\frac{1}{8}$	17	256
						1	$15\frac{1}{9}$	$227\frac{5}{9}$
							1	$15\frac{1}{17}$

* Juwelengewicht.

** Holländisches Troygewicht.

§. 31.

Münzen.

I. Erklärungen.

1) Das Zusammenschmelzen des Goldes und Silbers oder Kupfers, oder des Silbers und Kupfers, nennt man Legiren oder Beschicken.

2) Feines Gold und Silber heißt jenes, das keinen Zusatz von schlechteren Metallen hat. Daher bezeichnet „feine Mark"

(Mark fein) Gold und Silber ohne Zusatz; „rauhe Mark" (Mark rauh) Gold und Silber mit Zusatz.

* Die rauhe Mark heißt z. B. 20 karatig, oder 11 löthig, wenn sie 20 Karat feines Gold und 4 Karat Zusatz, oder 11 Loth feines Silber und 5 Loth Zusatz enthält.

3) Das Gold wird $15\frac{1}{2}$ mal höher geschätzt, als das Silber, und dieses $18\frac{1}{2}$ mal höher als das Kupfer.

* Das Verhältniß des Werthes der edleren Metalle zu dem Werthe unedler ist nicht für alle Zeiten und Orte gleich.

4) Es gibt

a) reelle und

b) fingirte Münzen.

a.

Die reellen oder gangbaren Münzen sind aus beschickten edleren Metallen wirklich geprägte Geldstücke.

b.

Die fingirten oder Rechnungsmünzen sind ein Maaßstab des Kaufwerthes aller Dinge, also auch der reellen Münzen.

5) Das absolute Gewicht einer Münze heißt ihr Schrot, ihr Gehalt an Gold (edleren Metallen) oder Silber ihr Korn.

6) Der Münzfuß ist die gesetzliche Regel, nach der Schrot, Korn und Kaufwerth einer Münze bestimmt werden.

7) Der Werth der reellen Münzen hängt ab

a) von der Güte (Qualität) und

b) von dem Gewichte (Quantität) des darin enthaltenen Metalles.

8) Das Gepräge der Münze enthält Schrift, Namen, Bildniß und Wappen des Münzherrn, wodurch derselbe die Beschaffenheit der Münze versichert. Die Bildseite heißt Hauptseite (Avers). Die Schrift= und Wappenseite heißt Rückseite (Revers).

Anmerkung zu Nro. 6.

1) Der Münzfuß war immer veränderlich.

2) Merkwürdige Münzfuße sind:

a) im Golde:

α) der rheinische Goldguldenfuß 72 Stück auf die rauhe Mark von 18 Karat, 8 Gran Goldes und 3 Gran Silber. Nach diesem Fuß sind die bayer. Karoline und Mardors geprägt,

β) der Dukatenfuß, 67 Stück auf eine feine Mark von 23 Karat, 8 Gran Gold und 2 Gran Silber.

b) Im Silber:

α) der 24 Guldenfuß, die feine Mark zu 16 Reichsthaler, 24 Gulden oder 10 Konventionsthaler,

β) der Konventions- oder 20 Guldenfuß,

γ) der Graumannische oder 21 Guldenfuß,

δ) der Münzfuß des süddeutschen Zollvereins.

* * *

1) In unserm Vaterlande ist der Münzfuß des süddeutschen Zollvereins, seit dem Ende des Jahres 1837, eingeführt.

2) Die Münzkonvention des süddeutschen Zollvereins enthält folgende Bestimmungen:

„Die Mark fein Silber wird ungemünzt zu 24½ Gulden, der „Gulden wird zu 60 Kreuzer angenommen. Ausgeprägt werden: „Gulden- und Halbguldenstücke. Der Feingehalt bei diesen Münzen „ist $\frac{9}{10} = 0 \cdot 9$. Die Guldenstücke haben 30 millimetres, und „die Halbguldenstücke 24 millimetres im Durchmesser. Der „Avers zeigt das Bildniß des Regenten (bei der freien Stadt „Frankfurt das Stadtwappen); der Revers den Werth und die „Jahreszahl in einem Kranze von Eichenlaub."

„Anstatt der verschiedenen, früher gebrauchten und von einander „abweichenden Exemplaren der Kölner-Mark wird die Bestim„mung von 1 Mark = 233·835 grammes bei allen Staaten des „süddeutschen Zollvereins eingeführt."

„Als Scheidemünzen werden Sechs- und Dreikreuzer-Stücke „(Sechser und Groschen) geprägt, und zwar die Mark fein zu 27 „Gulden. Bei diesen Münzen ist der Feingehalt $\frac{1}{8} = 0 \cdot 125$."

„Der Durchmesser der Sechskreuzer-Stücke ist 20 millimetres. „der Durchmesser der Dreikreuzer-Stücke 17 millimetres. Der „Avers zeigt das Wappen des Staates, der Revers die Werthbe„stimmung und Jahreszahl in einem Kranze von Eichenlaub."

3) Ueber die kleinern Scheidemünzen, als Kreuzerstücke im 27 fl. Fuße, mit $\frac{3}{16}$ Feingehalt . . . enthält die Münzkonvention keine Bestimmung.

4) Von den ältern Münzsorten, welche noch alle im Curse sind, wurden herabgesetzt im Jahre 1837:

a) der halbe Kronenthaler von 1 fl. 21 kr. auf 1 fl. 20 kr.

c) der viertels Kronenthaler von 40½ auf 39 kr.

II. Unsere cursirenden Kupfer-, Silber- und Gold-Münzen.

Die gewöhnlichen Geldmünzen, die in Bayern im Curs und in der Rechnung vorkommen, sind:

a) in Kupfer.

1) Der Kupferkreuzer = 1 kr.,
2) der halbe Kupferkreuzer oder Zweier = $\frac{1}{2}$ kr.,
3) der Pfenning = $\frac{1}{4}$ kr.,
4) der Heller = $\frac{1}{8}$ kr.

b) in Silber.

1) Der Gulden = 60 kr. = 1 fl.,
2) der halbe Gulden = 30 kr.,
3) der Fünfzehner = 15 kr.,
4) der Vierundzwanziger = 24 kr.,
5) der Zwölfer = 12 kr.,
6) der Sechser = 6 kr.,
7) der Groschen = 3 kr.,
8) der Kreuzer = 1 kr.,
9) das $3\frac{1}{2}$ Guldenstück = 3 fl. 30 kr.,
10) der Kronenthaler = 2 fl. 42 kr.,
11) der halbe Kronenthaler = 1 fl. 20 kr.,
12) der viertels Kronenthaler = 39 kr.,
13) der Bayerische- oder Konventionsthaler = 2 fl. 24 kr.,
14) der halbe bayerische Thaler oder Achtzehnbätzner = 1 fl. 12 kr.

• Der Reichsthaler = 1 fl. 30 kr. und der Batzen = 4 kr., sind fingirte Münzen.

c. in Gold.

Münze.		Dukatengewicht.		Werth.
1) der bayer. Dukaten	=	60 Gr.	=	5 fl. 20 kr., im Curs 5 fl. 30 kr.
2) die bayer. Karoline	=	2 Duk. 47 Gr.	=	11 fl. 0 kr.,
3) das halbe Karolinstück	=	1 Duk. 24 Gr.	=	5 fl. 30 kr.,
4) der Mardor	=	1 Duk. 51 Gr.	=	7 fl. 20 kr.,
5) der halbe Mardor	=	56 Gr.	=	3 fl. 40 kr.

und noch einige andere.

§. 32.

Gegenstände, welche blos gezählt werden.

1) Viele Gegenstände werden blos gezählt. Dabei hat man zum Zählen zu Einheiten:

einen Wurf oder Schuß (gewöhnlich) = 5 Stücke; daher

12 Würfe Kreuzer
4 „ Groschen
2 „ Sechser
1 Wurf Zwölfer } = 1 fl.

1 „ Vierundzwanziger = 2 fl.
1 „ Bayer. oder Conventions-Thaler = 12 fl.
2 Würfe Kronenthaler = 27 fl.
3 „ halbe Kronen = 20 fl.

1 Paar = 2 Stücke;
1 Dutzend = 12 „
1 Mandel = 15 „
1 Schilling = 30 „
1 Schock = 60 „

* 1 Schober = 60 Garben, Bund oder Schaub.

** 1 Rolle Juchten = 6 Häute,
20 Rollen „ = 1 Ballen.

2) Beim Papier ist:

1 Ballen = 10 Rieß,
1 Rieß = 20 Buch,
1 Buch = { 24 Bogen Schreibpapier, 25 „ Druckpapier; } demnach

Ballen,	Rieß,	Buch,		Bogen.
1 =	10 =	200 =	{	4800 Schreibpapier, 5000 Druckpapier,
	1 =	20 =	{	480 Schreibpapier, 500 Druckpapier,
		1 =	{	24 Schreibbogen, 25 Druckbogen.

BB. Die Lehre der Uebertragung von einer Ordnung in die andere.

§. 33.

Erklärungen.

1) Bei den angewandten Zahlen finden sich auch höhere und niedere Ordnungen (§. 11. 3).

* Die benannten Zahlen befolgen nur in sehr wenigen Fällen das Dezimalsystem (§. 11. 5), d. i. nur sehr selten bilden je 10 Einheiten einer niedern Ordnung eine Einheit der nächsthöhern Ordnung.

2) Eine Summe von gleichartigen benannten Größen (z. B. von fl. und kr., von ℔. und Ztr., von Fuß und Zoll, von Tagen und Monaten ...) heißt eine zusammengesetzte benannte Größe. Eine zusammengesetzte benannte Größe wird gewöhnlich so angeschrieben, daß man das Additionszeichen, welches die einfachen gleichartigen Größen zur Summe verbinden soll, wegläßt.

* Der Rang einer benannten Zahl (z. B. einer von niederer bei einer von höherer Ordnung) ist nicht durch die Stelle (§. 12. 2. b), in welche sie gesetzt ist, sondern durch ihre spezielle Benennung bestimmt. Wenn die Benennungen gleichartiger Zahlen gegeben sind, so können die der höhern oder die der niedern Ordnung angehörigen die erste Stelle einnehmen.

3) Jene Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten einer niedern Ordnung eine Einheit einer höhern Ordnung geben, heißt Reduktions- oder Auflösungs-Zahl.

4) Die Uebertragung einer Zahl von einer Ordnung in eine andere geschieht

I. entweder durch die Resolvirung, oder

II. durch die Reduktion.

I.

Resolvirung.

Erklärung.

Einheiten einer höhern Ordnung in Einheiten einer niedern Ordnung zu bringen, heißt resolviren (resolvere).

Aufgabe.

Eine gegebene Zahl zu resolviren.

Auflösung.

1) Wenn die zu resolvirende Zahl nicht mehrnamig ist, so vermehre man sie mit der Auflösungs-Zahl der nächstniedrigen oder sogleich der niedrigsten Einheiten, in welche die gegebene Zahl verwandelt werden soll.

2) Wenn aber die aufzulösende Zahl mehrnamig ist, so vermehre man die Einheiten der höchsten Benennung mit der Auflösungszahl der nächstniedern Ordnung, indem man zum Produkte die gegebenen Einheiten derselben Ordnung addirt.

Beispiele.

I. Wie viele Stunden hat das gemeine Jahr?

Auflösung.

$$365 \times 24 = 8760 \text{ Stunden.}$$

II. Wie viele Linien (Duodezimal) hat die bayer. Elle?

Auflösung.

$$1 \text{ Elle} = 2' \; 10'' \; 3'''$$

$$\big((2 \times 12) + 10\big) \text{ Zoll} + 3''' = 34'' \; 3'''.$$

$$(34 \times 12) + 3 = 408 + 3 = 411'''.$$

III. Wie viel Quintchen machen 1 Ztr., 50 ℔., 16 Loth?

Auflösung.

$$(150 \times 32) + 16 = 4800 + 16 \text{ Loth.}$$

$$4816 \times 4 = 19264 \text{ Quintchen.}$$

IV. Wie viele Kreuzer geben 3 fl., 1 Reichsthaler, 1 halber Bayer. Thaler, 3 Zwölfer und 1 Sechser?

Auflösung.

$$3 \text{ fl.} + 1 \text{ Reichsthaler} + \tfrac{1}{2} \text{ Bayerthaler} + 3 \text{ Zwölfer}$$
$$5 \text{ Sechser} = x;$$

$$(3 \times 60) + (1 \times 90) + (1 \times 72) + (3 \times 12) + (5 \times 6) = x;$$

$$180 + 90 + 72 + 36 + 30 = x;$$

$$408 = x; \text{ und}$$

408 Kreuzer.

V. Wie viele Pfenninge machen 3 Kronenthaler, 2 Gulden, 1 halber Kronenthaler, 2 Vierundzwanziger, 3 Sechser, 1 Groschen und 1 Kreuzer?

Auflösung.

3 Kronenthaler + 2 fl. + $\frac{1}{2}$ Krthl. + 2 Brzwg. + 3 Sechser + 1 Grsch. + 1 kr. = x;

$$\big((3 . 162) + (2 . 60) + (1 \times 80) + (2 . 24) + (3 . 6) (1 \times 3) + (1 \times 1)\big) \times 4 = x;$$

$$(486 + 120 + 80 + 48 + 18 + 3 + 1) \times 4 = x;$$

$$756 \times 4 = x;$$

x = 3024 Pfennige.

II.

Reduktion.

Erklärung.

Zahlen oder Einheiten einer niedrigern Ordnung auf Einheiten einer höhern Ordnung bringen, heißt reduciren (reducere).

Aufgabe.

Gegebene Einheiten zu reduciren.

Auflösung.

Man theile die gegebenen Einheiten der niedrigsten Benennung, welche die zu reducirende Zahl hat, durch die Reduktionszahl der nächsthöhern Ordnung. Der Rest, wenn ein solcher bleibt, hat die Benennung des Dividends, der Quotus aber erhält die nächsthöhere Benennung. Mit diesem Quotienten wird auf dieselbe Art die Reduktion weiter fortgesetzt.

Beispiele.

I. Jemand lebte 11146815 Minuten. Wie viel Jahre, Monate, Tage, Stunden macht dieses?

Auflösung.

11148615 : 60 = 185810 Std. + 15 Minuten;

185810 : 24 = 7742 Tag + 2 Std;

7742 : 30 = 258 Monate + 2 Tage;

258 : 12 = 21 Jahr + 6 Monate; also

21 Jahre, 6 Monate, 2 Tage, 2 Stunden, 15 Minuten.

II. Wie viele Gulden, Sechser, Groschen, Kreuzer machen 3160 Pfenninge?

Auflösung.

3160 : 4 = 790 kr.

790 : 3 = 263 Gr. + 1 kr

263 : 2 = 131 Sechsr. + 1 Gr.

131 : 10 = 13 Guld. + 1 Sechsr.; also

13 Gulden, 1 Sechser, 1 Groschen, 1 Kreuzer.

III. Ein Krämer verkauft jährlich 382152 Loth Kaffee; wie viel macht dieses Lasten, Tonnen, Ztr. und ℔.?

Auflösung.

382152 : 32 = 11942 ℔. + 8 Loth;

11942 : 100 = 119 Zt. + 42 ℔.;

119 : 20 = 5 Tonnen + 19 Zt.;

5 : 2 = 2 Lasten + 1 Tonnen; also

2 Lasten, 1 Tonne, 19 Zt., 42 ℔. und 8 Loth.

IV. Ein Zentner Regenwasser faßt im kubischen Inhalte 2270772017 Kubikskrupel (Dezim. Maaß); wie viele Kubik- Fuß- Zoll- und Linien macht dieses?

Auflösung.

$2270772017 : 1000 = 2270772\,c''' + 17\,c^{IV}$.

$2270772 : 1000 = 2270\,c'' + 722\,c'''$;

$2270 : 1000 = 2\,c' + 270\,c'''$ d. i.

$2\,c' + 270\,c'' + 772\,c''' + 17\,c^{IV}$..

II. Artikel.

Rechnungen mit angewandten Zahlen.

§. 34.

Erklärungen.

1) Rechnungen, welche sich auf bestimmte Arten von Dingen beziehen, heißen Rechnungen mit **benannten** oder **angewandten Zahlen**.

* Bei den Rechnungen mit benannten Zahlen müssen oft mehrere Rechnungen zu einer Rechnung miteinander verbunden werden. Es lassen sich nicht leicht Regeln aufstellen, die angeben, welche der 4 Species angewendet, und welche Ordnung beobachtet werden müsse bei sogenannten praktischen Aufgaben, welche verschiedene Größen haben, und welche zu ihrer Auflösung mehr als eine der vier Species erfordern. Am besten bestimmt hier gehörige Ueberlegung.

2) Mit den Benennungen der Zahlen hat die Rechnung

selber nichts zu thun; sie sollen nur angeben, welchen Arten von Größen die Zahlen unterliegen, um den Gang der Rechnung bestimmen zu können.

* Streng genommen geschehen alle Rechnungen mit unbenannten Zahlen.

3) Das Resultat, das die Rechnung findet, ist nicht eine benannte, sondern eine unbenannte Zahl, deren Benennung nach dem ganzen Zusammenhange der Aufgabe bestimmt werden muß.

§. 35.

Addition mit benannten Zahlen.

Satz.

Nur gleichnamige Größen können unter eine Summe gebracht werden.

* Man kann z. B. nur Gulden zu Gulden, Pfund zu Pfund, Kronenthaler zu Kronenthalern, Ellen zu Ellen addiren; nicht aber können etwa Gulden zu Pfund, oder zu Ellen, oder zu Thalern (ohne daß diese auf Gulden gebracht waren) gezählt werden. Nur gleichnamige Dinge können auch von einander abgezogen werden.

Aufgabe.

Benannte Zahlen verschiedener Ordnungen zu addiren.

Auflösung.

Man sortire die Summanden unter einander (§. 14. §. 16.). Dann beginne man die Addition bei der niedrigsten Benennung. Enthält die Summe derselben schon Einheiten der nächst höhern Ordnung, so ziehe man sie durch Reduction heraus, und addire sie zur Summe der Einheiten der nächsthöhern Ordnung; den allenfallsigen Rest aber setze man unter die addirten Größen. Mit diesen hat er gleiche Benennung. Auf diese Weise fahre man bis zur höchsten oder letzten Ordnung fort.

Beispiele.

I. Ein Kaufmann erhält vier Lieferungen Zucker. Zuerst nämlich 13 Zt. 88 ℔. 17 Loth; dann 32 Zt. 49 ℔. 25 Loth; dann 19 Zt. 57 ℔. 11 Loth; endlich 23 Zt. 95 ℔. 21 Loth. Wie viel Zt., ℔., Loth sind dieses?

Auflösung.

13 Zt.	88 ℔.	17 Loth	
32 =	49 =	25 =	
19 =	57 =	11 =	
23 =	95 =	21 =	
87 Zt.	289 ℔.	74 Loth;	oder
89 Zt.	91 ℔.	10 Loth.	

II. Ein Landmann hat 37 Tagwerk 10 □° 91 □′ 83 □″ Feld; 15 Tagwerk 131 □° 75 □′ 17 □″ Wiesen, 23 Tagwerk 219 □° 54 □′ 61 □″ Waldung und 5 Tagwerk 312 □° 48 □′ 39 □″ Gartenboden. Wie viele Tagwerke, Ruthen ꝛc. machet dieses zusammen?

Auflösung.

37 Tagw.	10 □°	91 □′	83 □″
15 =	131 =	75 =	17 =
23 =	219 =	54 =	61 =
5 =	312 =	48 =	39 =
81 Tagw.	274 □°	70 □′	0 □″.

III. Ein Student brauchte im

Monate	November	2 Karol.	9 fl.	54 kr.
=	Dezember	2 =	4 =	28 =
=	Januar	2 =	7 =	17 =
=	Februar	3 =	2 =	11 =
=	März	3 =	1 =	58 =
=	April	2 =	10 =	32 =
=	Mai	2 =	9 =	36 =
=	Juni	3 =	5 =	18 =
=	Juli	3 =	8 =	24 =
=	August	4 =	3 =	27 =

Wie viele Karolin, fl und kr. macht dieses?

Auflösung.

I.	2 Karolin	9 fl.	54 kr.
II.	2 =	4 =	28 =
III.	2 =	7 =	17 =
IV.	3 =	2 =	11 =
V.	3 =	1 =	58 =
VI.	2 =	10 =	32 =
VII.	2 =	9 =	36 =
VIII.	3 =	5 =	18 =
IX.	3 =	8 =	24 =
X.	4 =	3 =	27 =

26 Karolin 63 fl. 5 kr.; oder
31 Karolin 8 fl. 5 kr.; oder
341 + 8 fl. 5 kr.; oder
349 fl. 5 kr.

§. 36.

Subtraction mit benannten Zahlen.

Satz.

Nur gleichnamige Dinge können von einander abgezogen werden.

* Man kann z. B. nur Gulden von Gulden, Pfund von Pfund, Elle von Elle ꝛc. abziehen.

Aufgabe.

Benannte Zahlen zu subtrahiren.

Auflösung.

1) Man sortirt (§. 15. §. 16.) die Ordnung des Minuends und Subtrahends, und zieht die des Letzteren von jenem des Ersteren, von der niedrigsten Sorte angefangen, ab.

2) Kann man bei einer Sorte im Minuend nicht abziehen, so borge man bei der nächsthöhern Ordnung eine Einheit, die, in Theile der niedrigen Benennung verwandelt, zu den schon vorhandenen Einheiten addirt wird.

* Es ist zu merken, daß die geborgte Einheit nicht, wie bei unbenannten Zahlen, gerade Einheiten der nächstniedrigeren Ordnung enthalten muß, sondern nach Verschiedenheit der Größen einen verschiedenen Werth hat. Borgt man z. B. vom Pfund eine Einheit zu Lothen, so hat das Pfund natürlich 32 Loth; ebenso 1 fl. geborgt zu kr., gibt 60 kr.; ein Monat geborgt zu Tage, hat 30 Tage ꝛc.

3) Wenn im Minuende mehrere auf einander folgende Ordnungen fehlen, so borgt man eine Einheit von der nächst vorhandenen höhern Benennung und vertheilt diese so auf die niedrigern Sorten, daß man überall abziehen kann.

Beispiele.

I. Pius wurde 1810 am 6. Okt. Nachmittags um 3 Uhr geboren, starb 1838 am 15. August Morgens um 10 Uhr. Wie alt war er, als er das Zeitliche verließ?

Auflösung.

		12				24			
1837	Jahr	7	Monat	14	Tag	10	Stund		
—(1809	„	9	„	5	„	15	„	)	
27	Jahr	10	Monat	8	Tag	19	Stund.		

II. Ein Weinwirth verkauft von seinem Weinvorrathe, der 105 Eimer 13 Maaß 1 Quartl beträgt, 79 Eimer 37 Maaß 3 Quartl. Wie viel bleibt ihm noch?

Auflösung.

105 Eimer $\overset{60}{13}$ Maaß $\overset{4}{1}$ Quartl
— (79 = 37 = 3 =)

25 Eimer 35 Maaß 2 Quartl.

III. Jemand besitzt 9 Karolin, 3 Kronenthaler, 2 fl., 1 Vierundzwanziger=, 1 Zwölfer= und 3 Sechser=Stücke. Er kauft sich verschiedene Bedürfnisse für 63 fl. 42 kr. Wie viel bleibt ihm noch übrig?

Auflösung.

Vorerst werde der ganze Besitz in Gulden und Kreuzer verwandelt.

9 Karolin 3 Krthlr. 2 fl. 1 Vrzwgr. 1 Zwölfer 3 Sechser = x:
99 fl. + 8 fl. 6 kr. + 2 fl. + 54 kr. = 110 fl. 0 kr.

Wirkliche Subtraction.

110 fl. + $\overset{60}{0}$ kr.
— (63 = + 42 =)

46 fl. 18 kr.

IV. Jemand besitzt 157 fl. 33 kr. und schuldet dagegen 89 fl. 57 kr.; wie groß war sein Vermögen?

Auflösung.

157 fl. + 33 kr.
— (89 = + 57 =)

67 fl. 36 kr.

§. 37.

Multiplication mit benannten Zahlen.

Aufgabe.

Benannte Zahlen zu multipliciren.

Auflösung.

Man berücksichtige, ob die Factoren sind
I. lauter einfache Größen, oder ob
II. eine zusammengesetzte Größe unter denselben ist.

I.

Wenn die Factoren lauter einfache Größen sind, so werden ihre Zahlen unmittelbar mit einander multiplicirt.

II.

Wenn einer der Factoren (der Multiplicand) eine zusammengesetzte, benannte Zahl ist, so kann die Multiplication verrichtet werden

a) mit Resolvirung oder
b) ohne dieselbe.

a.
(mit Resolvirung.)

Man resolvirt alle Sorten des Multiplicands in Einheiten der niedrigsten Benennung, und vermehrt den so veränderten Multiplicand mit dem (ebenfalls resolvirten) Multiplicator (wenn dieser eine benannte Zahl ist); das Produkt muß durch Reduction auf die enthaltenen höhern Ordnungen gebracht werden.

b.
(ohne Resolvirung.)

Man multiplicirt mit dem Multiplicator, von der niedrigsten Sorte des Multiplicands angefangen, bis zur höchsten vor, jede Sorte eigens; am Ende sucht man die in dem Produkte einer jeden niedrigern Sorte enthaltenen höhern Einheit durch Reduction heraus, und zählt sie immer zu den höhern Einheiten.

Beispiele.

I. Ein Student hat monatlich 3 Zwölfer Taschengeld; wie viel macht dieses in 10 Monaten?

I. Auflösung.

3 Zwölfer × 10 = 30 Zwölfer
30 : 5 = 6; d. i.
= 6 fl.

II. Auflösung.

Resolvirung in Kreuzer.

3 Zwölfer = 36 kr.

Eigentliche Multiplication.

36 × 10 = 360 kr.

Reductirung auf Gulden.

360 : 60 = 6 fl.

II. Jemand verkauft die Maaß Wein um 1 fl. 40 kr.; wie viel Karoline löst er für 5 Eimer 30 Maaß?

Auflösung.

Resolvirung.

1 fl. 40 kr. = 100 kr.
5 Eimer 30 Maaß = 330 Maaß.

Eigentliche Multiplication.

$$100 \times 330 = 33000 \text{ kr.}$$

Reducirung.

$$33000 : 60 = 550 \text{ fl.}$$
$$550 : 11 = 50 \text{ Karoline.}$$

III. Jemand bezahlt für einen Metzen Getreid 5 Vierundzwanziger; wieviel fl. kosten ihn 16 Schäffl und 4 Metzen?

Auflösung.

Resolvirung.

$$5 \times 24 = 120;$$
$$120 \text{ kr.} = 2 \text{ fl.}$$
$$16 \text{ Schffl.} + 4 \text{ Mtz.} = ((16 \times 6) + 4) \text{ Mtz.};$$
$$(96 + 4) \text{ Mtz.} = 100 \text{ Mtz.}$$

Multiplication.

$$100 \times 2 = 200 \text{ fl.}$$

IV. Jemand kauft 1 ℔. Gewürze um einen Reichsthaler; wie viel bayer. Thaler kosten ihn 1 Ztr. 20 ℔.?

Auflösung.

Resolvirung.

1 Rchsthlr. = 1 fl. 30 kr.
1 fl. 30 kr. = 90 kr.
1 Zt. + 20 ℔. = 120 ℔.
1 Bayerthlr. = 2 fl. 24 kr.
2 fl. 24 kr. = 144 kr.

Multiplication.

$$120 \times 90 = 10800.$$

Reducirung.

$$10800 : 144 = x;$$
$$1200 : 16 = x;$$
$$150 : 2 = x;$$
$$75 = x; \text{ d. i.}$$
$$x = 75 \text{ Bayerthaler.}$$

§. 38.

Division mit benannten Zahlen.

Aufgabe.

Benannte Zahlen zu dividiren.

Auflösung.

1) Hat man einen schon an sich unbenannten Divisor,

a) so resolvirt man entweder den Dividend auf Einheiten der niedrigsten Benennung, und theilt auf gewöhnliche Art, oder

b) man dividirt jeden Theil des Dividends durch den gegebenen Divisor, indem man bei der höchsten Benennung der Division beginnt.

Wenn irgendwo ein Rest bleibt, so verwandle man ihn sogleich in die nächst niedrigen Einheiten, und zähle sie zu denen, zu welchen sie gehören.

2) Ist der Divisor wie der Dividend benannt, so bringe man beide auf gleiche Benennung und dividire wie mit ganzen Zahlen.

* Der Quotus bleibt dann gewöhnlich eine unbenannte.

Beispiele.

I. Ein Diener erhielt für mehrere Wochen von seinem Dienstherrn 10 Karoline, 3 Kronenthaler, 1 Gulden, 1 Halb-Gulden- und ein Vierundzwanziger-Stück Dienstlohn. Wie viele Wochen hat er gedient, wenn er für jede Woche 3 fl. 20 kr. erhalten sollte.

Auflösung.

Resolvirung.

10 Karoline	$= 10 \times 11 \times 60$
"	$= 6600$ kr.
3 Kronenthaler	$= 3 \times (120 + 42)$
"	$= 486$ kr.
1 fl.	$= 60$ kr.
$\frac{1}{2}$ fl.	$= 30$ kr.
1 Vierundzwzg.	$= 24$ kr.
3 fl. 20 kr.	$= 200$ kr.

Theilung.

$$(6600 + 486 + 60 + 30 + 24) : 200 = x.$$

$$7200 : 200 = x.$$

$$72 : 2 = x.$$

$$36 = x; \text{ also}$$

36 Wochen.

II. Ein Weinwirth bezahlt für 3 Eimer 35 Maaß Wein 30 Karolin, 4 Kronenthaler, 2 Gulden und 3 Vierundzwanziger; wie theuer kommt ihm die Maaß?

Auflösung.

Resolvirung.

30 Karoline $= 30 \times 11 \times 60$

$330 \times 60 = 19800$ kr.

4 Kronenthaler $= 4 \times 162$ kr.

$4 \times 162 = 648$ kr.

2 fl. $= 120$ kr.

3 Zwanziger $= 72$ kr.

3 Eimer 35 Maaß = 215 Maaß.

Division.

$(19800 + 648 + 120 + 72) : 215 = x;$

$20640 : 215 = x;$

$4128 : 43 = x;$

$96 = x;$ also

96 kr. = 1 fl. 36 kr.

III. Ein Krämer zahlt für eine Lieferung Zucker, das ℔. zu 48 kr., 30 Karolin, 10 Kronenthaler und 3 fl.; wie viel Zucker erhielt er?

Auflösung.

Resolvirung.

30 Karoline $= 30 \times 60 \times 11$ kr.

$1800 \times 11 = 19800$ kr.

10 Kronenthaler $= 10 \times 162$ kr.

$10 \times 162 = 1620$ kr.

3 fl. $= 180$ kr.

Division.

$(19800 + 1620 + 180) : 48 = x;$

$21600 : 48 = x;$

$450 = x;$ d. i.

$x = 4$ Ztr. + 50 ℔.

IV. Ein Metzger verkauft wochentlich 7 Ztr. und 15 ℔. Fleisch. Wie oft konnte er jedesmal 13 ℔. davon auswägen?

Auflösung.

Resolvirung.

7 Ztr. 15 ℔. = 715 ℔.

Theilung.

$715 : 13 = x;$

$55 = x;$ also

55 mal.

§. 39.

Lehnsätze und Aufgaben aus der Geometrie.

I. Lehnsätze.

I. Man erhält den Inhalt einer Fläche (eines Rechteckes), wenn man eine Länge mit einer andern multiplcirt.

* Die eine Länge heißt Grundlinie (Basis) und die andere Höhe der Fläche.

II. Man erhält den Inhalt eines Körpers (Kubikinhalt), wenn man eine Länge mit einer Fläche multiplicirt, oder drei Längen als Factoren zu einem Produkte gebraucht.

* Die Fläche heißt Grundfläche (Basis), die Länge wird Höhe oder Tiefe genannt.

II. Aufgaben.

I. Den Flächeninhalt eines Rechteckes zu finden, wenn Höhe und Basis gegeben sind.

Auflösung.

Man multiplicire Höhe und Basis.

Zusatz. Wenn der Flächeninhalt gegeben ist, so findet man

a) die Höhe desselben, wenn man durch die Basis den Flächeninhalt theilt; und

b) die Basis desselben, wenn man durch die Höhe den Flächeninhalt dividirt.

II. Den Kubikinhalt eines Körpers zu finden, wenn Basis und Höhe gegeben sind.

Auflösung.

Man multiplicire die Höhe mit der Basis.

Zusatz. Wenn der Kubikinhalt eines Körpers und zwei Längen desselben gegeben sind, so findet man die dritte Länge (Höhe = Tiefe, oder Breite oder Länge), wenn man den cubischen Inhalt durch das Produkt aus den gegebenen Längen dividirt.

Beispiele.

I. Jemand bewohnt ein Zimmer, das 18 Fuß, 5 Zoll lang und 16 Fuß, 8 Zoll Dez. breit ist; welches ist der Flächeninhalt vom Boden dieser Wohnung?

Auflösung.

Resolvirung.

18 Fuß 5 Zoll = 185 Zoll
16 „ 8 „ = 168 „

Multiplication.

$185 \times 168 = x;$

$32080 = x;$ und

$x = 32080$ Zoll oder

$32080 : 100 = x'$ Fuß d. i.

$320 \square' + 80 \square''.$

II. Jemand bewohnt ein Zimmer, dessen Boden ein Rechteck bildet, das 255 □′ Flächeninhalt hat und 15′ breit ist; welches ist die Länge des Zimmers?

Auflösung.

$255 : 15 = x;$

$17 = x;$ d. i.

17′ ist die Länge.

III. Welches ist der Kubikinhalt einer Mauer, welche 6 Fuß hoch, 25 Fuß lang und 2 Fuß dick ist?

Auflösung.

$6 \times 25 \times 2 = x;$

$6 \times 50 = 300;$ d. i.

300 Kubikfuß.

IV. Ein viereckigtes Gefäß faßt 210 Kubikfuß Wasser, der Boden desselben ist 7 Fuß lang und 5 Fuß breit; wie tief ist dieses Gefäß?

Auflösung.

$210 : (7 . 5) = x;$

$210 : 35 \quad = 6;$ d. i.

6 Fuß beträgt die Tiefe.

Zweiter Curs.

I. Hauptstück.

Von den Brüchen überhaupt, und der Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen.

II. Hauptstück.

Von den gemeinen Brüchen.

A.

Von den gemeinen Brüchen mit unbenannten Zahlen.

B.

Von den gemeinen Brüchen mit benannten Zahlen.

III. Hauptstück.

Von den besonderen Brüchen.

I. Abtheilung.

Von den Dezimalbrüchen.

A.

Von den reinen Dezimalbrüchen.

B.

Von den angewandten Dezimalbrüchen.

II. Abtheilung.

Von den Sexagesimalbrüchen.

III. Abtheilung.

Von den Kettenbrüchen.

* * *

Anhang.

Einiges von der Potenzenlehre.

Zweiter Curs.

I. Hauptstück.

Von den Brüchen überhaupt, und der Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen.

II. Hauptstück.

Von den gemeinen Brüchen.

A.

Von den gemeinen Brüchen mit unbenannten Zahlen.

B.

Von den gemeinen Brüchen mit benannten Zahlen.

III. Hauptstück.

Von den besonderen Brüchen.

I. Abtheilung.

Von den Dezimalbrüchen.

A.

Von den reinen Dezimalbrüchen.

B.

Von den angewandten Dezimalbrüchen.

II. Abtheilung.

Von den Sexagesimalbrüchen.

III. Abtheilung.

Von den Kettenbrüchen.

* * *

Anhang.

Einiges von der Potenzenlehre.

I. Hauptstück.

I. Artikel.

Von den Brüchen überhaupt.

---

§. 40.

Erklärungen.

1) Einen oder mehrere gleiche Theile, in welche die Einheit (ein Ganzes) zerlegt ist, nennt man eine gebrochene Zahl oder einen Bruch (fractio).

2) Zur Bezeichnung eines Bruches sind 2 Zahlen nöthig, und zwar

a) eine, die angibt, in wie viele gleiche Theile die Einheit zerlegt werden soll — der Nenner (denominator);

b) die andere, die anzeigt, wie viele von diesen gleichen Theilen genommen werden sollen — der Zähler (numerator).

a.

Die Einheit kann in größere, d. i. in wenigere, oder in kleinere, d. i. in mehrere gleiche Theile zerlegt werden, z. B. in 2; 3; 4 ... Theile. Ein solcher Theil heißt dann: halber, dritter, vierter ... Theil der Einheit; je nachdem nämlich die Einheit durch eine größere oder kleinere Zahl getheilt ist, bekömmt der Bruch einen andern Nenner. Der Nenner gibt also der getheilten Einheit seine Benennung, und heißt deßhalb Nenner.

b.

Die gebrochene Einheit kann mehrmal wiederholt werden (mehrmal als eigene Einheit, als Einheit, die niederer Ord-

nung ist, als das Ganze zu sich selbst gezählt werden). Die Zahl, welche die öftere Wiederholung ausdrückt, heißt der Zähler.

§. 41.

Aufgabe.

Brüche anzuschreiben und auszusprechen.

Auflösung.

I. Angeschrieben werden die Brüche gewöhnlich so, daß beide Zahlen (Zähler und Nenner) durch eine kleine Linie (—) getrennt werden. Der Zähler steht über der Linie, der Nenner unter derselben; z. B.

$$\frac{1}{2}; \quad \frac{2}{5}; \quad \frac{3}{7}.$$

* Jeder Bruch kann als eine angezeigte Division, oder als ein Quotient (§. 9. b. δ), dessen Dividend der Zähler und dessen Divisor der Nenner ist, betrachtet werden: daher ist ein Bruch auch nicht unrichtig angeschrieben, wenn zwischen Zähler und Nenner ein Divisionszeichen steht; z. B.

1 : 2 ist dasselbe, was $\frac{1}{2}$;
2 : 5 = = = $\frac{2}{5}$;
3 : 7 = = = $\frac{3}{7}$ ꝛc.

II. Beim Aussprechen eines Bruches läßt man auf den Zähler den Nenner folgen, und hängt diesem die Nachsylbe „stel" oder „tel" an, je nachdem er auf „zig" ausgeht oder nicht.

Man spricht z. B. $\frac{2}{5}$ aus: zwei Fünftel;
$\frac{3}{7}$ = drei Siebentel;
$\frac{7}{20}$ = sieben Zwanzigstel;
$\frac{11}{30}$ = eilf Dreißigstel.

§. 42.

Sätze.

1) Der Werth eines Bruches ist bei demselben Nenner um so größer oder kleiner, je größer oder kleiner sein Zähler ist; d. i.

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{3}; \quad \frac{4}{5} > \frac{3}{5};$$

$$\frac{4}{7} < \frac{5}{7}; \quad \frac{7}{9} < \frac{8}{9} \text{ u. s. w.}$$

2) Der Werth eines Bruches ist bei demselben Zähler um so größer oder kleiner, je kleiner oder größer sein Nenner ist, d. i.

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{6}; \quad \frac{4}{7} > \frac{4}{9};$$

$$\frac{3}{5} < \frac{3}{4}; \quad \frac{8}{13} < \frac{8}{11} \text{ u. s. w.}$$

3) Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn man dessen Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt. Z. B.

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12};$$

$$\frac{12}{15} = \frac{12:3}{15:3} = \frac{4}{5}.$$

4) Jeder Bruch, in dem Zähler und Nenner einander gleich sind, gleicht einem Ganzen. In einem solchen Bruche nimmt man alle Theile durch den Zähler, in wie viele Theile die Einheit durch den Nenner zerlegt ist. Alle Theile sind aber gleich dem Ganzen. Daraus folgt:

a) daß die Einheit als ein Bruch von allen möglichen Nennern ausgedrückt werden kann, wenn nur der Zähler dem Nenner gleich gemacht wird, d. i.

$$1 = \frac{3}{3} = \frac{7}{7} = \frac{11}{11} = \frac{33}{33} = \frac{17}{17} = \frac{23}{23} \text{ u. s. f.}$$

b) daß jede ganze Zahl als ein Bruch dargestellt werden kann, wenn man die Einheit durch einen Bruch ausdrückt, und den Zähler dieses (der Einheit gleichen) Bruches mit der ganzen Zahl vermehrt. Z. B.

$$7 = 7 \times 1 = 7 \times \frac{5}{5} = \frac{35}{5};$$

$$8 = 8 \times \frac{9}{9} = \frac{72}{9} \text{ u. s. w.}$$

* Hiedurch wird die Zahl zugleich um gleiches vermehrt und vermindert, in ihrem Werthe aber die Größe nicht verändert.

5) Wenn bei der Division ganzer Zahlen ein Rest bleibt, so ist der Quotient (vom Dividend getheilt durch den Divisor) gleich der ganzen Zahl, die angibt, wie oft der Divisor im Dividende enthalten ist, mehr einem Bruche, dessen Zähler der Rest, und dessen Nenner der Divisor ist.

* Der Rest ist also ein Theil vom Dividend, der noch durch den Divisor getheilt werden soll, aber doch keine ganze Einheit enthält, weil er kleiner ist, als der Divisor. Z. B.

I. $156 : 7 = 22 + \frac{2}{7} = 22\frac{2}{7}$;

II. $1746 : 5 = 349 + \frac{1}{5} = 349\frac{1}{5}$;

III. $489765 : 13 = 37674 + \frac{3}{13} = 37674\frac{3}{13}$.

§. 43.

Sätze.

Jedes einseitige Multipliciren oder Dividiren des Zählers oder des Nenners muß den Werth eines Bruches verändern.

I. Vermehrt wird der Werth eines Bruches:

1) wenn man entweder den Zähler durch eine ganze Zahl multiplicirt, oder

2) wenn man den Nenner dadurch dividirt; z. B. das Achtfache von $\frac{5}{16}$ ist entweder

$$\frac{5 \times 8}{16} = \frac{40}{16} \text{ oder}$$

$$\frac{5}{16 : 8} = \frac{5}{2}.$$

II. Vermindert wird der Werth eines Bruches:

1) wenn man entweder den Zähler durch die ganze Zahl theilt, oder

2) wenn man den Nenner damit vermehrt; z. B. der siebente Theil von $\frac{21}{23}$ ist entweder

$$\frac{21 : 7}{23} = \frac{3}{23} \text{ oder}$$

$$\frac{21}{23 \times 7} = \frac{21}{161}.$$

§. 44.

S ä t z e.

I. **Erweitert** wird ein Bruch, wenn man seinen Zähler und Nenner mit derselben Zahl vermehrt, ihn also ohne Veränderung des Werthes durch größere Zahlen darstellt.

Will man z. B. $\frac{2}{7}$ mit 123 mal so großen Zahlen ausdrücken, ohne den Werth des Bruches zu ändern, so vermehre man Zähler und Nenner mit 123 und man erhält

$$\frac{2 \times 123}{7 \times 123} = \frac{246}{861}.$$

So ist $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{7}{21} = \frac{9}{27} \ldots$

* Erweitern heißt also den Bruch seines Werthes unbeschadet durch größere Zahlen ausdrücken.

II. Einen Bruch **vereinfachen**, **abkürzen** oder **reduciren** heißt, ihn ohne Veränderung des Werthes durch kleinere Zahlen darstellen, welches dadurch geschieht, daß man Zähler und Nenner durch einen gemeinschaftlichen Theiler dividirt.

Will man z. B. $\frac{28}{35}$ vereinfachen, so theile man Zähler und Nenner durch 7 und man erhält

$$\frac{28}{35} = \frac{28 : 7}{35 : 7} = \frac{4}{5}.$$

Man reducire $\frac{512}{768}$; $\frac{384}{512}$.

* Durch die Reduction wird der Bruch auf seine kleinste Benennung gebracht und ungemein vereinfacht.

** Um einen Bruch auf die kleinste Benennung bringen zu können, muß man für Zähler und Nenner das größte gemeinschaftliche Maaß kennen, oder wissen, welches die größte Zahl ist, durch welche Zähler und Nenner ohne Rest getheilt werden können. Das größte gemeinschaftliche Maaß für Zahlen zu finden, gibt an

II. Artikel.

Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen.

§. 45.

Erklärungen.

1) Man sagt, eine Zahl sey durch eine andere theilbar, wenn diese in jener ohne Rest enthalten ist, oder in ihr aufgeht. Z. B. 15 ist durch 5 theilbar, weil 5 in 15 ohne Rest 3 mal enthalten ist; 15 ist aber nicht durch 4 theilbar, weil 15 : 4 nicht aufgeht.

2) Eine Zahl, die durch eine andere theilbar ist, heißt ein Vielfaches von dieser; eine Zahl, durch die das Vielfache theilbar ist, heißt ein Theiler, Maaß oder Theilvielfaches von dem Vielfachen. So ist in 15 : 5 z. B. 15 ein Vielfaches von 5; und 5 ein Theiler von 15.

3) Die theilbaren Zahlen heißen zusammengesetzte Zahlen, im Gegensatze von den einfachen, die nur durch sich selbst und durch 1 theilbar sind und absolute Primzahlen genannt werden.

* Absolute Primzahlen sind z. B. 1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41 ...

4) Wenn mehrere Zahlen kein anderes gemeinschaftliches Maaß als 1 haben, aber doch an und für sich Vielfache sind, so heißen sie relative Primzahlen, oder Primzahlen unter sich, zu einander.

* So sind z. B. 16 und 27 relative Primzahlen, wiewohl keine von diesen eine absolute Primzahlen ist. Ferner sind Primzahlen unter sich 25 und 27; 49 und 64; 45 und 49 u. dgl. m.

5) Diejenigen Zahlen, die sich mit 0; 2; 4; 6 und 8 endigen, heißen gerade Zahlen; ungerade Zahlen heißen diejenigen, die sich mit 1; 3; 5; 7 und 9 endigen.

* Die 1te, 3te, 5te, 7te, 9te ... Stelle in einer Zahl heißt ungerade; die 2te, 4te, 6te, 8te, 10te ... Stelle dagegen heißt gerade Stelle.

§. 46.

Sätze.

1) Wenn zwei Zahlen durch eine dritte theilbar sind, so ist es auch ihre Summe und ihre Differenz; z. B. 21 und

15 sind durch 3 theilbar. Eben so ihre Summe $21 + 15 = 36$ und ihre Differenz $21 - 15 = 6$.

2) Die Summe einer beliebigen Anzahl von Zahlen ist durch eine Zahl theilbar, wenn durch sie alle einzelnen Summanden theilbar sind; z. B. 308 (aus den Summanden:

$$21 + 14 + 35 + 28 + 42 + 56 + 49 + 63)$$

ist durch 7 theilbar, weil jeder der Summanden ein Vielfaches von 7 ist.

3) Ist die Summe zweier Zahlen, und einer der Summanden durch eine Zahl theilbar, so muß es auch der andere sein.

In $84 = 49 + 35$ sind z. B. 84 und 49 durch 7 theilbar; es muß nun auch 35 ein Vielfaches von 7 sein.

* Wenn von zwei Zahlen nur die eine ein Vielfaches von einer dritten ist, so kann ihre Summe nicht ein Vielfaches dieser dritten sein. Weil z. B. in $19 = 16 + 3$ blos 16 ein Vielfaches von 4 ist, so kann 19 durch 4 nicht theilbar sein.

4) Eine Zahl, welche in einen der Factoren aufgeht, ist natürlich auch ein Theiler des Produktes.

In $84 = 21 \times 4$ ist z. B. 21 durch 7 theilbar, also muß es auch 84 sein.

§. 47.

Sätze.

1) Alle gerade Zahlen sind durch 2 theilbar.

2) Alle Zahlen, welche sich mit 0 oder 5 endigen, sind durch 5 theilbar.

3) Zahlen sind durch 3 oder 9 theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern durch 3 oder 9 theilbar ist. Z. B.

I. 4761 ist durch 9 theilbar, weil $4 + 7 + 6 + 1 = 18$ durch 9 theilbar ist.

II. 4065 ist durch 3 theilbar, weil $4 + 6 + 5 = 15$ durch 3 theilbar ist.

4) Durch 11 ist eine Zahl theilbar, wenn der Unterschied zwischen der Summe der in den ungeraden Stellen stehenden Ziffern und der Summe der in den geraden Stellen stehenden Ziffern von einer Zahl gleich Null (0), Eilf (11), oder einem Vielfachen von Eilf ist. Z. B.

I. 297 ist durch 11 theilbar, weil die Differenz zwischen 2 + 7 und 9 gleich Null ist.

II. 7161 ist durch 11 theilbar, weil der Unterschied zwischen 7 + 6 und 1 + 1 gleich 11 ist.

III. 907082 ist durch 11 theilbar, weil die Differenz zwischen 9 + 7 + 8 und 2 gleich 22, d. i. einem Vielfachen von 11 ist.

IV. 2809161729 ist durch 11 theilbar, weil 33 die Differenz zwischen 2 + 1 + 1 + 2 und 8 + 9 + 6 + 7 + 9 ist.

5) Durch 4 sind Zahlen theilbar, wenn es die zwei letzten Ziffern sind. Z. B.

I. 2736 ist durch 4 theilbar, weil 36 durch 4 getheilt werden kann.

2736 : 4 = 684.

II. 684 ist durch 4 theilbar, weil 84 es ist.

684 : 4 = 171.

6) Durch 6 ist eine Zahl theilbar, wenn sie durch die Factoren von 6, durch 3 und 2, getheilt werden kann. Z. B.

1728 ist durch 6 theilbar, weil 1728 eine gerade Zahl ist und weil 1 + 7 + 2 + 8 = 18 durch 3 theilbar ist.

7) Durch 8 läßt sich eine Zahl theilen, wenn die letzten 3 Ziffern der Zahl durch 8 getheilt werden können. Z. B.

749056; 47832; 864 sind durch 8 theilbar, weil die letzten 3 Ziffern jeder dieser Zahlen durch 8 theilbar sind.

8) Alle Zahlen, deren letzte zwei Ziffern Nullen oder ein Vielfaches von 25 sind, lassen sich durch 25 theilen.

9) Alle Zahlen, deren letzte drei Ziffern Nullen oder ein Vielfaches von 125 sind, lassen sich durch 125 theilen.

10) Durch 10; 100; 1000 &c. sind Zahlen theilbar, wenn sie mit 1; 2; 3 &c. Nullen endigen (§. 21. 5).

11) Eine Zahl, die aus 3 gleichen Ziffern besteht, ist durch 37 theilbar.

* Ob zwei Zahlen (in einem Bruche z. B. Nenner und Zähler) einen gemeinschaftlichen Theiler haben, zeigt (um den Bruch vereinfachen zu können) überhaupt die Anwendung folgender Aufgabe.

§. 48.

Aufgabe.

Von zwei Zahlen den größten gemeinschaftlichen Theiler zu suchen.

Auflösung.

Man theile die größere von zwei gegebenen Zahlen durch die kleinere, dann mit dem Rest, wenn ein solcher geblieben ist, den vorigen Divisor, und so immer mit dem letzten Rest den vorhergehenden Divisor, bis entweder der Divisor sich aufhebt, oder 1 zum Reste gibt. Im ersten Falle ist der letzte Divisor das größte gemeinschaftliche Maaß, im zweiten gibt es kein solches.

Beispiele.

I. Man suche für 1507 und 1781 das größte gemeinschaftliche Maaß.

Auflösung.

$$1781 : 1507 = 1 + \tfrac{274}{1507},$$
$$-1507$$
$$274); 1507 : 274 = 5 + \tfrac{137}{274},$$
$$-1370$$
$$137); 274 : 137 = 2.$$
$$-274$$
$$0$$

Für 1507 und 1781 ist also 137 der größte gemeinschaftliche Theiler.

$$1507 : 137 = 11;$$
$$1781 : 137 = 13.$$

II. Man bringe $\frac{1781}{2329}$ auf die kleinste Benennung.

Auflösung.

$$2329 : 1781 = 1 + \tfrac{548}{1781},$$
$$-1781$$
$$548); 1781 : 548 = 3 + \tfrac{137}{548},$$
$$-1644$$
$$137); 548 : 137 = 4.$$
$$-548$$
$$0$$

Dieser Bruch kann wieder vereinfacht werden durch 137.

$$\frac{1791}{2329} = \frac{1791 : 137}{2329 : 137} = \frac{13}{17}.$$

III. Man bringe $\frac{357}{611}$ auf die kleinste Benennung.

Auflösung.

$611 : 357 = 1 + \frac{254}{357},$
-357
$254); \; 357 : 254 = 1 + \frac{103}{254},$
-254
$103); \; 254 : 103 = 2 + \frac{48}{103},$
-206
$48); \; 103 : 48 = 2 + \frac{7}{48},$
-96
$7); \; 48 : 7 = 6 + \frac{6}{7},$
-42
$6); \; 7 : 6 = 1 + \frac{1}{6},$
-6
$1); \; 6 : 1 = 6.$

Der Bruch $\frac{357}{611}$ kann also nicht weiter vereinfacht werden.

IV. Man suche die Brüche $\frac{3136}{12932}, \frac{11968}{32744}, \frac{1444}{6863}, \frac{3017}{3879}$ zu vereinfachen.

Auflösung zur Uebung.

* Der Grund des Verfahrens liegt in dem §. 46, 1. aufgestellten Satze.

§. 49.

Erklärungen.

1) Die Brüche unterscheiden sich
 a) in ächte und
 b) in unächte.

a.

Ist der Zähler kleiner als der Nenner, d. i. wenn der Werth des Bruches kleiner als die Einheit ist (§. 42. 4. a), so ist der Bruch ein ächter; z. B.

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{5} \ldots.$$

b.

Ist der Zähler größer als der Nenner, ohne von ihm ein Vielfaches (§. 45. 2.) zu sein; so ist der Bruch ein unächter. Z. B.

$$\frac{3}{2};\ \frac{4}{5};\ \frac{7}{6};\ \frac{9}{8};\ \frac{11}{10}\ldots$$

2) Man hat

a) eigentliche und

b) uneigentliche Brüche.

a.

Ein eigentlicher Bruch ist der, dessen Zähler durch den Nenner nicht theilbar ist (§. 45. 1). Z. B.

$$\frac{3}{4};\ \frac{5}{3};\ \frac{7}{9};\ \frac{6}{5}\ldots$$

b.

Ein eigentlicher oder scheinbarer Bruch ist der, dessen Zähler ein Vielfaches des Nenners ist (§. 45. 2.), also jede ganze Zahl, die durch einen Bruch ausgedrückt ist. Z. B.

$$\frac{6}{2};\ \frac{3}{3};\ \frac{8}{4};\ \frac{25}{5};\ \frac{81}{9}\ldots$$

3) Eine ganze Zahl mit einem Bruche heißt eine gemischte Zahl. Z. B.

$$1\frac{2}{3};\ 4\frac{5}{6};\ 7\frac{8}{9};\ 10\frac{11}{12}\ldots$$

4) Man unterscheidet die Brüche noch

a) in reguläre oder einfache und

b) in irreguläre oder zusammengesetzte.

a.

Einfache oder reguläre Brüche sind solche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Z. B.

$$\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{7}{8};\ \frac{9}{11}\ldots$$

b.

Irreguläre oder zusammengesetzte Brüche sind solche, deren Zähler oder Nenner, oder Zähler und Nenner zugleich wieder Brüche sind. Z. B.

$$\frac{3}{\left(\frac{4}{5}\right)};\ \frac{\left(\frac{7}{9}\right)}{3};\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)};\ \frac{\left(1\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)};\ \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(7\frac{1}{3}\right)}\ldots$$

5) Ist der Nenner eines Bruches wieder ein Bruch, mit dem Nenner dieses letztern wieder ein Bruch u. s. w. verbunden, so heißt die dadurch entstandene Reihe von Brüchen ein *Kettenbruch*, ein *stettiger* oder *zusammenhängender* oder *continuirlicher Bruch*.

Solche Brüche sind:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7+\ldots}}}}}} \qquad \cfrac{2}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{3}{8+\cfrac{5}{9+\cfrac{1}{6+\cfrac{4}{9+\ldots}}}}}}$$

§. 50.

Eintheilung.

Die Brüche werden eingetheilt

I. in *gemeine*, die was immer für einen Nenner haben mögen, und

II. in *besondere*, die nur gewisse Formen haben (und von ihren Nennern besonders benannt werden.)

I.

Zu den gemeinen Brüchen gehören:
- die ächten und unächten,
- die eigentlichen und uneigentlichen Brüche,
- die gemischten Zahlen, und
- die einfachen und zusammengesetzten Brüche.

II.

Zu den besondern Brüchen werden gezählt:
- die Dezimalbrüche,
- die Sexagesimalbrüche, und
- die Kettenbrüche.

II. Hauptstück.

Von den gemeinen Brüchen.

A.

Von den gemeinen, reinen, gebrochenen Zahlen (§. 50.).

AA. Von der Gleichnamigmachung der Brüche.

§. 51.

Aufgaben und Erklärungen.

1) Die Lehre von den gemeinen Brüchen ist hinreichend dargestellt in der Auflösung folgender Aufgaben:

I. Aufgabe.

Eine gemischte Zahl in einen unächten Bruch zu verwandeln.

II. Aufgabe.

Einen unächten Bruch in eine gemischte Zahl zu verwandeln.

III. Aufgabe.

Zwei gegebene ungleichartige Brüche, für die der Generalnenner noch nicht gegeben ist, auf einerlei Benennung zu bringen oder gleichnamig zu machen.

IV. Aufgabe.

Mehrere ungleichartige Brüche, für welche der Generalnenner schon gegeben ist, auf einerlei Benennung zu bringen.

V. Aufgabe.

Brüche auf den kleinsten Generalnenner zu bringen.

VI. Aufgabe.

Bestimmen, welcher von zwei ungleichnamigen Brüchen der größere sey.

VII. Aufgabe.

Zwei oder mehrere Brüche zu addiren.

VIII. Aufgabe.

Einen Bruch abziehen (oder hinwegnehmen),

1) von einem andern Bruche,

2) von einer ganzen } Zahl.
3) von einer gemischten }

IX. Aufgabe.

Einen ächten Bruch multipliciren

1) mit einem ächten Bruche,
2) mit einer ganzen } Zahl.
3) mit einer gemischten }

X. Aufgabe.

Einen ächten Bruch dividiren

1) durch einen ächten Bruch,
2) durch eine ganze } Zahl.
3) durch eine gemischte }

XI. Aufgabe.

Einen Bruch (irregulären oder zusammengesetzten Bruch) in einen einfachen zu verwandeln.

2) Der Auflösung der angeführten Aufgaben sind aber noch folgende Erklärungen und Sätze vorauszuschicken:

a) Brüche unter einerlei Benennung bringen, heißt dieselben, ohne ihren Werth zu verändern, in andere verwandeln, welche alle einerlei Nenner haben (§. 42. 3).

b) Brüche, welche einerlei Nenner haben, werden gleichartige oder gleichnamige, welche verschiedene Nenner haben, ungleichartige oder ungleichnamige Brüche genannt; z. B. $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{4}$ sind gleichartige Brüche, weil bei jedem dieser das Ganze in Viertheile getheilt ist; dagegen sind $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{7}$ ungleichartige, weil in diesen Brüchen die Einheit bald in 2, bald in 3, bald in 7 Theile getheilt ist. Jeder Bruch von letztern enthält verschiedenartige Theile mit den andern.

* Gleichartig werden Brüche mittelst der Erweiterung gemacht. Wenn mehrere ungleichartige Brüche gleichartig gemacht werden sollen, so ist entweder

α) ein Nenner schon gegeben, den alle andern Brüche bekommen sollen (welcher Generalnenner heißt), oder

β) er muß erst gebildet werden.

α.

Ist der Generalnenner schon gegeben, so hat ihn

αα) einer der gleichnamig zu machenden Brüche, oder

ββ) es hat ihn noch keiner von diesen.

c) Nur gleichartige Brüche können addirt und subtrahirt werden.

d) Wie bei ganzen Zahlen (§. 18 und §. 23), so dienen sich auch bei Brüchen Addition und Subtraction, und Multiplication und Division gegenseitig zur Probe.

e) Für gebrochene mehrgliedrige Zahlen gilt, was für ganze mehrgliedrige gesagt ist (§. 17, §. 20. 5).

§. 52.

I. Aufgabe.

Eine gemischte Zahl in einen unächten Bruch zu verwandeln.

Auflösung.

Man vermehre die Ganzen mit dem Nenner des Bruches, addire zum Produkte ihren Zähler, und setze unter diese Summe den Nenner.

* Dieses Verwandeln einer gemischten Zahl in einen unächten Bruch nennt man Brucheinrichten.

Beispiele.

I. Man mache $6\frac{3}{4}$ zu einem unächten Bruch.

Auflösung.

$$6\frac{3}{4} = \frac{(6 \times 4) + 3}{4};$$

$$\frac{24 + 3}{4} = \frac{27}{4}.$$

II. Man verwandle $9\frac{5}{7}$ in einen unächten Bruch.

Auflösung.

$$9\frac{5}{7} = \frac{(9 \times 7) + 5}{7};$$

$$\frac{63 + 5}{7} = \frac{68}{7}.$$

III. Die gemischte Zahl $13\frac{4}{5}$ soll in einem unächten Bruch verwandelt werden.

Auflösung.

$$13\frac{4}{5} = \frac{(13 \times 5) + 4}{5};$$

$$\frac{65 + 4}{5} = \frac{69}{5}.$$

§. 53.

II. Aufgabe.

Einen unächten Bruch in eine gemischte Zahl zu verwandeln.

Auflösung.

Man theile den Zähler des Bruches durch den Nenner und schreibe zu den erhaltenen Ganzen den restirenden ächten Bruch.

Beispiele.

I. Es soll $\frac{19}{4}$ in eine gemischte Zahl verwandelt werden.

Auflösung.

$$\frac{19}{4} = 4 + \frac{3}{4} = 4\frac{3}{4}.$$

II. Es werde aus $\frac{23}{3}$ eine gemischte Zahl.

Auflösung.

$$\frac{23}{3} = 7 + \frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}.$$

III. Man verwandle den unächten Bruch $\frac{29}{5}$ in eine gemischte Zahl.

Auflösung.

$$\frac{29}{5} = 5 + \frac{4}{5} = 5\frac{4}{5}.$$

IV. Der unächte Bruch $\frac{37}{8}$ soll in eine gemischte Zahl verwandelt werden.

Auflösung.

$$\frac{37}{8} = 4 + \frac{5}{8} = 4\frac{5}{8}.$$

§. 54.

III. Aufgabe.

Zwei gegebene ungleichartige Brüche, für welche der Generalnenner noch nicht gegeben ist, auf einerlei Benennung zu bringen oder gleichnamig zu machen.

Auflösung.

Man vermehre den Nenner eines jeden Bruches mit dem Zähler des andern, und nehme die Produkte als Zähler. Die beiden Nenner multiplicire man mit einander und nehme ihr Produkt als Generalnenner.

Beispiele.

I. $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7}$ sollen gleichartig gemacht werden.

Auflösung.

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times7}{4\times7};$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5\times4}{7\times4};$$ und man hat

$\frac{21}{28}$ und $\frac{20}{28}$ so groß, als $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7}$.

II. Es sollen $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{5}$ gleichartig gemacht werden.

Auflösung.

$$\frac{5}{6} = \frac{5\times5}{6\times5};$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times6}{5\times6};$$ man hat

$\frac{25}{30}$ und $\frac{18}{30}$ so groß, als $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{5}$.

§. 55.

IV. Aufgabe.

Mehrere ungleichartige Brüche, für welche der Generalnenner schon gegeben ist, auf einerlei Benennung zu bringen.

Auflösung.

Man theile den gegebenen Generalnenner

α) er mag schon Nenner eines Bruches sein (§. 51. 2. b. α), oder

β) er mag, ohne daß er schon Bruchnenner ist, gegeben sein,

durch jeden speciellen Nenner, und vermehre die Quotusse mit den treffenden speciellen Zählern.

* Aus der Division des Generalnenners durch den speciellen Nenner ergibt sich nämlich der jedesmalige Factor, mit welchem Zähler und Nenner des Bruches vermehrt werden müssen, um denselben auf den Generalnenner zu bringen.

Beispiele.

I. Es seien $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{23}{30}$ und $\frac{47}{60}$ auf den Generalnenner 60 zu bringen.

Auflösung.

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{9}{10}; \frac{11}{12}; \frac{8}{15}; \frac{7}{20}; \frac{23}{30}; \frac{47}{60}.$$

$$\frac{1.30}{2.30}; \frac{2.20}{3.20}; \frac{3.15}{4.15}; \frac{4.12}{5.12}; \frac{5.10}{6.10}; \frac{9.6}{10.6}; \frac{11.5}{12.5}; \frac{8.4}{15.4};$$

$$\frac{7.3}{20.3}; \frac{23.2}{30.2}; \frac{47}{60}.$$

$$\frac{30;\ 40;\ 45;\ 48;\ 50;\ 54;\ 55;\ 32;\ 21;\ 46;\ 47.}{60.}$$

II. Es seien auf den Generalnenner 144 folgende Brüche zu bringen: $\frac{4}{9}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{23}{24}$; $\frac{13}{18}$.

Auflösung.

$$\frac{4}{9}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}; \frac{11}{12}; \frac{2}{3}; \frac{23}{24}; \frac{13}{18};$$

$$\frac{4.16}{9.16}; \frac{7.18}{8.18}; \frac{3.36}{4.36}; \frac{11.12}{12.12}; \frac{2.48}{3.48}; \frac{23.6}{24.6}; \frac{13.8}{18.8};$$

$$\frac{64;\ 126;\ 108;\ 132;\ 96;\ 138;\ 104.}{144.}$$

§. 56.

V. Aufgabe.

Brüche auf den kleinsten Generalnenner zu bringen.

Auflösung.

Man kann nach zwei Arten auflösen.

I. Art.

Dieser Generalnenner ist nichts anderes, als das kleinste Vielfache (§. 45. 2), in dem alle speciellen Nenner enthalten sind. Um diesen kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu finden, durchstreiche man

1) jene Nenner, welche schon in größern enthalten sind, zerfälle dann
2) jeden der noch gebliebenen Nenner in seine einfachen Factoren (§. 45. 3), streiche
3) von den gleichen Factoren verschiedener Nenner alle bis auf einen aus, in welchem die übrigen bereits vorkommen, und multiplicire
4) die übrig gebliebenen Größen mit einander.

Das daraus entstandene Produkt ist das kleinste Vielfache aller Nenner, mithin der kleinste Generalnenner. Die fernere Lösung der Aufgabe geschieht durch Anwendung der vorhergehenden Regeln §. 55.

Beispiele.

I. Man bringe folgende Brüche auf den kleinsten Generalnenner:

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{8}{9}; \frac{9}{10}; \frac{11}{12}; \frac{13}{14}; \frac{14}{15}; \frac{17}{18}.$$

Auflösung.

Die Nenner sind: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 18. Die gebliebenen Nenner sind: 8; 10; 12; 14; 15; 18. Diese werden in ihre Factoren zerfällt:

8; 10; 12; 14; 15; 18.

2.2.2; 2.5; 2.2.3; 7.2; 5.3; 3.3.2.

Von den gleichen Factoren verschiedener Nenner streiche man alle, bis auf die von einem aus, in dem die übrigen bereits vorkommen.

2.2.2; 2.5; 2.2.3; 2.7; 5.3; 3.3.2.

Diese übrig gebliebenenen Größen werden mit einander multiplicirt, und man hat das kleinste Vielfache für die Nenner aller gegebenen Brüche.

$$2.2.2 \times 7 \times 5 \times 3.3 = 8.7.5.9 = 56.45 = 2520.$$

Jetzt bringe man nach §. 55 die ungleichartigen Brüche auf den gegebenen Generalnenner.

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{8}{9}; \frac{9}{10}; \frac{11}{12}; \frac{13}{14}; \frac{14}{15}; \frac{17}{18}.$$

$$\frac{1.1260}{2.1260}; \frac{2.840}{3.840}; \frac{3.630}{4.630}; \frac{4.504}{5.504}; \frac{5.420}{6.420}; \frac{6.360}{7.360}; \frac{7.315}{8.315}; \frac{8.280}{9.280};$$

$$\frac{9.252}{10.252}; \frac{11.210}{12.210}; \frac{13.180}{14.180}; \frac{14.168}{15.168}; \frac{17.140}{18.140}.$$

$$\frac{1260;\ 1680;\ 1890;\ 2016;\ 2100;\ 2160;\ 2205}{2520.}$$

$$+\frac{2240;\ 2268;\ 2310;\ 2340;\ 2352;\ 2380}{2520.}$$

II. Art.

1) Man schreibe alle Nenner ihrer Größe nach unter eine Linie, z. B. die Nenner von obigen Brüchen.

2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 18.

2) Man nehme den kleinsten Nenner in dieser Reihe und schreibe ihn bei Seite, nachdem man alle von den übrigen durch ihren theilbaren Nenner getheilt hat; die durch dieses Theilen erhaltenen Quotusse und die nicht theilbaren Nenner bilden von Neuem eine Reihe; z. B.

2	2;	3;	4;	5;	6;	7;	8;	9;	10;	12;	14;	15;	18.
	1;	3;	2;	5;	3;	7;	4;	9;	5;	6;	7;	15;	9.

3) Bei dieser neuen Reihe und bei allen folgenden mache man es, wie bei der ursprünglich ersten. Zuletzt werden in der Reihe lauter Einheiten stehen und alle zum Generalnenner nöthigen Factoren werden bei Seite geschrieben sein.

* Einer von den ihrer Größe nach angeschriebenen (1.) Nennern kann zwar der kleinste unter den gegebenen Nennern aber doch selber eine zusammengesetzte (§. 45. 3) Zahl sein. Es kann daher auch einer seiner Factoren in einem oder dem andern der noch gegebenen Nennern enthalten sein, ohne daß er selber Theiler (§. 45. 2) für jeden andern gegebenen Nenner ist. Ist dieses der Fall, und will man den kleinsten Generalnenner für alle gegebenen Brüche, so theile man nicht durch den kleinsten vorhandenen Nenner unmitttelbar sondern mittelbar, indem man ihn in seine Factoren zerlegt (§. 24. II. 2), die Größen der Reihe durch diese Factoren dividirt, und auf die (in 2 und 3) angegebene Weise die zum Generalnenner nöthigen Factoren bestimmt.

4) Diese Factoren werden mit einander multiplicirt und ihr Produkt ist der Generalnenner.

2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	18
2	1	3	2	5	3	7	4	9	5	6	7	15	9
2		3	1	5	3	7	2	9	5	3	7	15	9
3		3		5	3	7	1	9	5	3	7	15	9
3		1		5	1	7		3	5	1	7	5	3
5				5		7		1	5		7	5	1
7				1		7			1		7	1	
						1					1		

Die zum Generalnenner nöthigen Factoren sind:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Beispiele zur Uebung.

II. Man bringe auf den kleinsten Generalnenner:

$$\frac{5}{8};\ \frac{3}{4},\ \frac{11}{14},\ \frac{7}{12},\ \frac{20}{21},\ \frac{55}{56},\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{6};\ \frac{4}{7};\ \frac{3}{5}.$$

III. Man suche das kleinste Vielfache für die Nenner folgender Brüche:

$$\frac{1}{9};\ \frac{2}{3};\ \frac{5}{12},\ \frac{3}{4};\ \frac{7}{8},\ \frac{59}{72},\ \frac{31}{36},\ \frac{43}{45},\ \frac{2}{5}.$$

IV. Man suche den kleinsten Generalnenner für folgende Brüche:

$$\frac{3}{4};\ \frac{4}{9};\ \frac{7}{10};\ \frac{20}{21};\ \frac{23}{25},\ \frac{13}{15},\ \frac{48}{49}.$$

Auflösung.

2	4	9	10	15	21	25	49
2	2 . 2	3 . 3	2 . 5	3 . 5	7 . 3	5 . 5	7 . 7
3	1 . 2	3 . 3	1 . 5	3 . 5	7 . 3	5 . 5	7 . 7
3	1	3 . 3	5	3 . 5	7 . 3	5 . 5	7 . 7
5		1 . 3	5	1 . 5	7 . 1	5 . 5	7 . 7
7		1	5	5	7	5 . 5	7 . 7
5			1	1	7	1 . 5	7 . 7
7					1	5	7 . 7
						1	7
							1

Die zum Generalnenner nöthigen Factoren sind:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 5 = 44100.$$

Wenn alle speciellen Nenner Primzahlen sind, so ist der General-Nenner ein Produkt aus allen speciellen Nennern. Die neuen speciellen Zähler zu erhalten, multiplicire man den vorigen Zähler eines Bruches durch die speciellen Nenner aller übrigen Brüche, nur durch den seinigen nicht. Z. B.

Man bringe folgende Brüche auf gleiche Benennung:

$$\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{7};\ \frac{5}{11}.$$

Der Generalnenner ist: $2.3.5.7.11 = 2310$. Die Auflösung des Beispieles aber ist:

$$\frac{1}{2};\qquad \frac{2}{3};\qquad \frac{3}{5};$$

$$\frac{1.3.5.7.11}{2.3.5.7.11};\ \frac{2.2.5.7.11}{3.2.5.7.11};\ \frac{3.2.3.7.11}{5.2.3.7.11};$$

$$\frac{4}{7};\qquad \frac{5}{11};$$

$$\frac{4.2.3.5.11}{7.2.3.5.11};\ \frac{5.2.3.5.7}{11.2.3.5.7}\ \text{d. i.}$$

$$\frac{1155;\ 1540;\ 1386;\ 1320;\ 1050}{2310}.$$

§. 57.

VI. Aufgabe.

Man bestimme, welcher von zwei Brüchen größer sey.

Auflösung.

Man bringe die Brüche, die verschiedene Nenner haben, auf einen gleichen Nenner; derjenige, der den größern Zähler hat, ist dem Werthe nach größer. Z. B.

I. Man bestimme, welcher von den beiden Brüchen größer sey $\frac{5}{6}$ oder $\frac{11}{12}$.

Auflösung.

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12};$$

$$\frac{10 < 11}{12};\ \text{also ist}$$

$$\frac{5}{6} < \frac{11}{12}.$$

II. Man gebe an, welcher von den Brüchen $\frac{7}{9}$ oder $\frac{8}{11}$ größer sey.

Auflösung.

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 11}{9 \times 11} = \frac{77}{99};$$

$$\frac{8}{11} = \frac{8 \times 9}{11 \times 9} = \frac{72}{99};$$

$$\frac{77 > 72}{99}; \text{ also}$$

$$\frac{7}{9} > \frac{8}{11}.$$

III. Man sehe, ob der erste, der zweite oder der dritte der größte von folgenden drei Brüchen sey.

$$\frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{22}{35}.$$

Auflösung.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 14}{5 \times 14} = \frac{42}{70},$$

$$\frac{7}{10} = \frac{7 \times 7}{10 \times 7} = \frac{49}{70},$$

$$\frac{22}{35} = \frac{22 \times 2}{35 \times 2} = \frac{44}{70}; \text{ also}$$

$$\frac{42 < 49 > 44}{70}.$$

BB. Die vier Rechnungsarten mit unbenannten Brüchen.

§. 58.

Addition.

VII. Aufgabe.

Zwei oder mehrere gemeine Brüche zu addiren.

Auflösung.

1) Man bringe die gegebenen Brüche auf gleichen Nenner, wenn sie diesen noch nicht haben.

2) Man addire alle Zähler zusammen und setze unter ihre Summe den gemeinschaftlichen Nenner.

Der auf diese Art erhaltene Bruch wird, wenn es sein kann, vereinfacht, oder wenn er Ganze enthält, in eine gemischte Zahl verwandelt.

3) Wenn die Brüche auch Ganze bei sich haben (d. i. gemischte Zahlen sind), so kann man entweder

a) die Ganzen und die Brüche besonders addiren, und dann die Summe der Ganzen und der Brüche zusammengeben oder man kann

b) die Ganzen mit ihrem zugehörigen Bruche in einen unächten Bruch verwandeln, und dann ganz wie bei ächten Brüchen verfahren.

Beispiele.

I. Man addire $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}$.

Auflösung.

$$\frac{2 + 3 + 4 + 5 + 6}{7} = x;$$

$$\frac{20}{7} = 2 + \frac{6}{7} = 2\frac{6}{7} = x.$$

II. Es werde zusammengezählt

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{4}{9} + \frac{3}{10} + \frac{8}{15} + \frac{1}{18} + \frac{11}{24}.$$

Auflösung.

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{4}{9} + \frac{3}{10} + \frac{8}{15} + \frac{1}{18} + \frac{11}{24} = x;$$

$$\frac{(60\,.\,5) + (45\,.\,7) + (40\,.\,4) + (36\,.\,3) + (24\,.\,8)}{360}$$

$$\frac{+ (20\,.\,1) + (15\,.\,11)}{360.} = x;$$

$$\frac{300 + 315 + 160 + 108 + 192 + 20 + 165}{360} = x;$$

$$\frac{1260}{360} = \frac{126}{36} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2};$$

$$3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} = x.$$

III. Man addire

$$3\frac{5}{7} + 7\frac{3}{4} + \frac{3}{40} + 6\frac{4}{5} + 5\frac{3}{8} + \frac{2}{7} + 2\frac{2}{3}.$$

Auflösung.

$$3\frac{5}{7} + 7\frac{3}{4} + \frac{3}{40} + 6\frac{4}{5} + 5\frac{3}{8} + \frac{2}{7} + 2\frac{2}{3} = x;$$

Entweder addire man die Ganzen und die Brüche besonders,

$$3 + 7 + 6 + 5 + 2 + \frac{5}{7} + \frac{3}{4} + \frac{3}{40} + \frac{4}{5} + \frac{3}{8} + \frac{2}{7} + \frac{2}{3} = x;$$

$$23+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}+\frac{30}{40}+\frac{3}{40}+\frac{4.8}{5.8}+\frac{3.5}{8.5}+\frac{2}{3}=x;$$

$$23+\frac{7}{7}+\frac{33}{40}+\frac{32}{40}+\frac{15}{40}+\frac{2}{3}=x;$$

$$23+1+\frac{80}{40}+\frac{2}{3}=24+2+\frac{2}{3};$$

$$26+\frac{2}{3}=26\frac{2}{3}=x;$$

oder man mache die gemischten Zahlen zu unächten Brüchen, und verfahre wie bei ächten Brüchen.

$$\frac{26}{7}+\frac{31}{4}+\frac{3}{40}+\frac{34}{5}+\frac{43}{8}+\frac{2}{7}+\frac{8}{3}=x;$$

$$\frac{26.40}{7.40}+\frac{31.70}{4.70}+\frac{3.7}{40.7}+\frac{34.56}{5.56}+\frac{43.35}{8.35}+\frac{2.40}{7.40}+\frac{8}{3}=x;$$

$$\frac{1040+2170+21+1904+1505+80}{280}+\frac{3}{8}=x;$$

$$\frac{6720}{280}+\frac{8}{3}=\frac{96}{4}+\frac{8}{3};$$

$$24+2\frac{2}{3}=26\frac{2}{3}=x.$$

IV. Es soll $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{7}{9}$ addirt werden.

V. Es sollen folgende Brüche addirt werden:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{9}{10}+\frac{11}{12}+\frac{14}{15}+\frac{23}{24}.$$

VI. Es sollen addirt werden

$$\frac{2}{3}+3\frac{2}{5}+\frac{14}{15}+2\frac{7}{8}+9\frac{5}{12}+3\frac{3}{4}+\frac{23}{24}.$$

VII. Man addire folgende Brüche und gemischte Zahlen:

$$3\frac{5}{6}+\frac{7}{16}+11\frac{7}{15}+\frac{4}{5}+9\frac{3}{4}+\frac{13}{24}.$$

VIII. Aus folgenden Brüchen werde eine Summe:

$$\frac{8}{9}+1\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+2\frac{3}{4}+6\frac{1}{5}+7\frac{1}{2}.$$

§. 59.

Subtraction.

VIII. Aufgabe.

Einen Bruch abzuziehen

1) von einem andern Bruche,

2) von einer ganzen } Zahl.

3) von einer gemischten } Zahl.

Auflösung.

1) Man mache die Brüche gleichartig, wenn sie es noch nicht sind, und ziehe den Zähler des Subtrahends vom Zähler des Minuends ab, unter den erhaltenen Rest schreibt man den gemeinschaftlichen Nenner und vereinfacht den Bruch, wenn es thunlich ist.

2) Wenn man von bloßen Ganzen einen Bruch abziehen soll, so mache man

a) die Ganzen zu einen uneigentlichen Bruch, der den Nenner des Subtrahends hat, und verfahre wie bei ächten Brüchen, oder

b) man borge von den Ganzen 1, wenn der abzuziehende Bruch ein ächter ist, und drücke die Einheit durch einen Bruch aus, der den Nenner des Subtrahends hat.

3) Hat man gemischte Zahlen von gemischten abzuziehen, so verfahre man ganz, wie bei ächten Brüchen, wenn vorher die gemischten Zahlen in unächte Brüche aufgelöst sind.

* Abgekürzt wird die Rechnung, wenn man Ganze von Ganzen, und Brüche von Brüchen abzieht. Dieses kann aber, wenn der Subtrahend einen größern Zähler hat, als der Minuend, nur mittelbar geschehen, indem man vorerst von den Ganzen borgen, durch einen dem Subtrahendsbruche gleichartigen Bruch ausdrücken, und zum Minuendsbruche zählen muß.

Beispiele.

I. Es soll subtrahirt werden $\frac{5}{12}$ von $\frac{11}{12}$.

Auflösung.

$$\frac{11}{12} - \frac{5}{12} = x;$$

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = x.$$

II. Es werde von $\frac{17}{18}$ der Bruch $\frac{1}{9}$ abgezogen.

Auflösung.

$$\frac{17}{18} - \frac{1}{9} = x;$$

$$\frac{17-2}{18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6};$$

$$\frac{5}{6} = x.$$

III. Der Bruch $\frac{3}{5}$ soll von 7 abgezogen werden.

Auflösung.

$$7 - \frac{3}{5} = x.$$

Entweder

$$\left(7 \times \frac{5}{5}\right) - \frac{3}{5} = \frac{35}{5} - \frac{3}{5};$$

$$\frac{32}{5} = 6 + \frac{2}{5};$$

$$6\frac{2}{5} = x; \text{ oder}$$

$$(6+1) - \frac{3}{5} = 6 + \frac{5}{5} - \frac{3}{5};$$

$$6 + \frac{2}{5} = 6\frac{2}{5} = x.$$

IV. Es werde von $17\frac{5}{8}$ die gemischte Zahl $9\frac{2}{5}$ abgezogen.

Auflösung.

$$17\frac{5}{8} - 9\frac{2}{5} = x;$$

$$17\frac{25}{40} - 9\frac{16}{40} = 8 + \frac{9}{40};$$

$$8\frac{9}{40} = x.$$

V. Man subtrahire $8\frac{2}{3}$ von $17\frac{2}{5}$.

Auflösung.

$$17\frac{2}{5} - 8\frac{2}{3} = x;$$

$$17\frac{6}{15} - 8\frac{10}{15} = 16 + \frac{(15+6)}{15} - 8\frac{10}{15};$$

$$8 + \frac{21}{15} - \frac{10}{15} = 8 + \frac{11}{15};$$

$$8\frac{11}{15} = x.$$

XI. Es soll von $\frac{7}{8} - \frac{4}{9} - \frac{2}{7}$ abgezogen werden $\frac{5}{6} - \frac{5}{14} - \frac{11}{12} - \frac{3}{7} + \frac{1}{72}$.

Auflösung.

$$\frac{7}{8} - \frac{4}{9} - \frac{2}{7} - \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{14} - \frac{11}{12} - \frac{3}{7} + \frac{1}{72}\right) = x;$$

$$\frac{7}{8} - \frac{4}{9} - \frac{2}{7} - \frac{5}{6} + \frac{5}{14} + \frac{11}{12} + \frac{3}{7} - \frac{1}{72} = x;$$

$$\frac{7}{8} - \frac{4}{9} - \frac{5}{6} + \frac{11}{12} - \frac{1}{72} - \frac{2}{7} + \frac{5}{14} + \frac{3}{7} = x;$$

$$\frac{(7\times9) - (4\times8) - (5\times12) + (6\times11) - 1}{72} - \frac{4}{14} + \frac{5}{14} + \frac{6}{14} = x$$

$$\frac{63 - 32 - 60 + 66 - 1}{72} + \frac{7}{14} = \frac{63 + 66 - 32 - 60 - 1}{72} + \frac{1}{2};$$

$$\frac{129 - 93}{72} + \frac{1}{2} = \frac{36}{72} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2};$$

$$1 = x.$$

Folgende Beispiele zur Uebung:

VII. Man subtrahire $\frac{5}{21}$ von $\frac{11}{21}$.

VIII. Man ziehe von $\frac{23}{24}$ den Bruch $\frac{1}{8}$ ab.

IX. Es soll von 9 der Bruch $\frac{3}{4}$ abgezogen werden.

X. Von $22\frac{9}{10}$ soll $\frac{5}{6}$ subtrahirt werden.

XI. Von $19\frac{5}{12}$ ziehe man $11\frac{3}{4}$ ab.

XII. Es soll von $\frac{1}{30} + \frac{7}{8} + \frac{4}{5} + \frac{7}{9} + \frac{13}{15}$ subtrahirt werden $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{3}{5}$.*

* Die Addition und Subtraction dienen sich auch bei Brüchen gegenseitig zur Probe (§. 51. d).

§. 60.

Multiplication.

IX. Aufgabe.

Einen ächten Bruch multipliciren

1) mit einem ächten Bruche,
2) mit einer ganzen } Zahl.
3) mit einer gemischten } Zahl.

Auflösung.

1) Man multiplicire die beiden Zähler und die beiden Nenner der Brüche mit einander. Das Produkt der Zähler gibt den Zähler, das Produkt der Nenner gibt den Nenner eines neuen Bruches, welcher das Produkt aus beiden zu multiplicirenden Brüchen ist.

Wenn zwei unächte Brüche, oder ein ächter und ein unächter Bruch mit einander multiplicirt werden sollen, so ist die Auflösung dieselbe, wie wenn ein ächter mit einem ächten Bruche zu vermehren ist.

Beispiele.

I. Es werde $\frac{5}{9}$ mit $\frac{3}{5}$ multiplicirt.

Auflösung.

$$\frac{5}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{45} = x.$$

Wenn es sein kann, vereinfache man

$$\frac{15:15}{45:15} = \frac{1}{3} = x.$$

II. Man multiplicire $\frac{77}{187}$ mit $\frac{68}{84}$.

Auflösung.

$$\frac{77}{187} \times \frac{68}{84} = x.$$

Wenn die Zähler und Nenner keine einfachen Zahlen sind, so können sie in ihre Factoren zerlegt, und mit diesen Theilfactoren kann multiplicirt werden. Z. B.

$$\frac{77}{187} \times \frac{68}{84} = \frac{7 . 11 \times 4 . 17}{11 . 17 \times 7 . 4 . 3} = x.$$

Durch Ausstreichen (§. 42. 3) der im Zähler und Nenner gleichen Theilfactoren kann das Produkt vereinfacht werden. Z. B.

$$\frac{7 . 11 \times 4 . 17 . 1}{11 . 17 \times 7 . 4 . 3} = \frac{1}{3} = x.$$

III. Es soll $\frac{119}{65}$ mit $\frac{52}{51}$ multiplicirt werden.

Auflösung.

$$\frac{119}{65} \times \frac{52}{51} = \frac{7 . 17 \times 4 . 13}{5 . 13 \times 17 . 3}$$

$$\frac{7 \times 4}{5 \times 3} = \frac{28}{15} = 1 + \frac{13}{15};$$

$$1\frac{13}{15} = x.$$

IV. Man multiplicire $\frac{12}{17}$ mit $\frac{85}{91}$.

V. Es werde $\frac{26}{34}$ mit $\frac{51}{143}$ multiplicirt.

VI. $\frac{19}{91}$ soll mit $\frac{65}{114}$ multiplicirt werden.

VII. Man multiplicire:

$\frac{512}{117}$ mit $\frac{91}{64}$; $\frac{35}{43}$ mit $\frac{258}{84}$; $\frac{55}{141}$ mit $\frac{47}{22}$.

2) mit einer ganzen Zahl wird ein ächter (oder unächter) Bruch vermehrt, wenn man mit der ganzen Zahl

a) den Zähler multiplicirt, oder

b) den Nenner dividirt (wenn es sein kann).

Oefters gibt man der ganzen Zahl den Nenner 1 und verfährt, wie bei einem unächten Bruche.

Beispiele.

I. Es soll $\frac{6}{7}$ mit 35 multiplicirt werden.

Auflösung.

$$\frac{6}{7} \times 35 = x;$$

$$\frac{6}{7} \times \frac{35}{1} = \frac{6 \times 7 \cdot 5}{7};$$

$$30 = x.$$

II. Zur Uebung multiplicire man:

$\frac{11}{14}$ mit 49; $\frac{75}{37}$ mit 111; $\frac{125}{51}$ mit 68.

3) Mit einer gemischten Zahl wird ein Bruch multiplicirt, wenn man die gemischte Zahl zu einem unächten Bruche macht und mit ihr, wie mit einem ächten Bruche multiplicirt.

Beispiele.

I. Es werde $\frac{3}{5}$ mit $7\frac{1}{3}$ multiplicirt.

Auflösung.

$$\frac{3}{5} \times 7\frac{1}{3} = x;$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{22}{3} = \frac{22}{5};$$

$$4\frac{2}{5} = x.$$

II. Man multiplicire $\frac{39}{5}$ mit $7\frac{9}{13}$; $15\frac{5}{18}$ mit 27; $19\frac{6}{49}$ mit $\frac{14}{33}$; $18\frac{4}{5}$ mit $8\frac{3}{4}$.

Zusatz. Wenn man mehrere Brüche mit einander zu multipliciren hat, so werden alle Nenner und alle Zähler mit einander multiplicirt und das zweite Produkt durch das erste dividirt.

I. Es soll $\frac{1}{2}$ mit $\frac{5}{11}$, mit $\frac{2}{3}$, mit $\frac{11}{12}$, mit $\frac{3}{4}$, mit $9\frac{3}{5}$ multiplicirt werden.

Auflösung.

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{11} \times \frac{2}{3} \times \frac{11}{12} \times \frac{3}{4} \times 9\frac{3}{5} = x;$$

$$\frac{1 \times 5 \times 2 \times 11 \times 3 \times ((9 \times 5) + 3)}{2 \times 11 \times 3 \times 12 \times 4 \times 5} = x;$$

$$\frac{45 + 3}{12 \times 4} = \frac{48}{48};$$

$$1 = x.$$

II. Man multiplicire $\frac{3}{8}$ mit $7\frac{4}{5}$, mit $\frac{3}{4}$, mit $6\frac{4}{15}$, mit $3\frac{23}{27}$, mit $\frac{40}{41}$.

Auflösung zur Uebung.

§. 61.

Division.

X. Aufgabe.

Durch einen Bruch zu dividiren

1) einen ächten (und unächten) Bruch,
2) eine ganze Zahl,
3) eine gemischte Zahl.

Auflösung.

1) Man stürze den Divisorbruch und multiplicire. Das Produkt aus den Zählern nun (eigentlich aus dem Zähler des Dividendbruches und aus dem Nenner des Divisorbruches) setze man als Zähler, das Produkt aus den Nennern (eigentlich aus dem Nenner des Dividendbruches und aus dem Zähler des Divisorbruches) setze man als Nenner eines Bruches, welcher den gesuchten Quotienten ausdrücken wird.

Beispiele.

I. Es soll $\frac{7}{8}$ durch $\frac{3}{16}$ dividirt werden.

Auflösung.

$$\frac{7}{8} : \frac{3}{16} = x;$$

$$\frac{7}{8} \times \frac{16}{3} = \frac{7 \times 8 \, . \, 2}{8 \times 3} = \frac{14}{3};$$

$$4\frac{2}{3} = x.$$

II. Es werde $\frac{5}{9}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt.

Auflösung.

$$\frac{5}{9} : \frac{3}{4} = x;$$

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{27} = x.$$

III. Man dividire $\frac{16}{17}$ durch $\frac{32}{51}$.

Auflösung.

$$\frac{16}{17} : \frac{32}{51} = x;$$

$$\frac{16}{17} \times \frac{51}{32} = \frac{16 \times 17 . 3}{17 \times 16 . 2} = \frac{3}{2};$$

$$1\frac{1}{2} = x.$$

* Den Quotienten eines Bruches, getheilt durch einen gleichartigen Bruch, erhält man, wenn man den Zähler des Dividendbruches durch den Zähler des Divisorbruches theilt. Z. B.

I. Man dividire $\frac{17}{19}$ durch $\frac{5}{19}$.

Auflösung.

$$\frac{17}{19} : \frac{5}{19} = 17 : 5;$$

$$3\frac{2}{5} = x.$$

II. Es soll $\frac{21}{25}$ durch $\frac{8}{25}$ dividirt werden.

Auflösung zur Uebung.

** Wenn Zähler und Nenner des Divisorbruches im Zähler und Nenner des Dividendbruches ohne Rest enthalten sind, so kann auch Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividirt werden. Z. B.

Es soll $\frac{25}{64}$ durch $\frac{5}{16}$ dividirt werden.

Auflösung.

$$\frac{25}{64} : \frac{5}{16} = \frac{25 : 5}{64 : 16} = \frac{5}{4};$$

$$1\frac{1}{4} = x.$$

2) Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividirt, wenn man der ganzen Zahl den Nenner 1 gibt, und dann verfährt, wie bei einem Bruche.

Beispiele.

I. Es soll 5 durch $\frac{8}{15}$ dividirt werden.

Auflösung.

$$5 : \frac{8}{15} = x;$$
$$\frac{5}{1} : \frac{8}{15} = \frac{5}{1} \times \frac{15}{8} = \frac{75}{8};$$
$$9\frac{3}{8} \quad = x.$$

II. Es soll 7 durch $\frac{14}{17}$; 35 durch $\frac{28}{31}$; 49 durch $\frac{63}{64}$ dividirt werden.

Auflösung zur Uebung.

3) Eine gemischte Zahl, welche durch einen Bruch dividirt werden soll, verwandelt man in einen Bruch und verfährt dann weiter, wie bei einem Bruche.

Durch gemischte Zahlen werden Brüche, ganze und gemischte Zahlen dividirt, wenn man die gemischten Zahlen zu unächten Brüchen macht und wie ächte behandelt.

Beispiele.

I. Es soll $13\frac{3}{5}$ durch $\frac{8}{15}$ dividirt werden.

Auflösung.

$$13\frac{3}{5} : \frac{8}{15} = x;$$
$$\frac{68}{5} : \frac{8}{15} = \frac{68}{5} \times \frac{15}{8};$$
$$\frac{17 \,.\, 4 \times 5 \,.\, 3}{5 \times 4 \,.\, 2} = \frac{51}{2};$$
$$25\frac{1}{2} \quad = x.$$

II. Es werde $\frac{26}{45}$ durch $7\frac{4}{5}$ dividirt.

Auflösung.

$$\frac{26}{45} : 7\frac{4}{5} = x;$$

$$\frac{26}{45} : \frac{39}{5} = \frac{26}{45} \times \frac{5}{39} = \frac{13 \,.\, 2 \times 5}{5 \,.\, 9 \times 3 \,.\, 13};$$

$$\frac{2}{27} = x.$$

III. Es soll 51 durch $6\frac{4}{5}$ dividirt werden.

Auflösung.

$$51 : 6\frac{4}{5} = x;$$

$$\frac{51}{1} : \frac{34}{5} = \frac{51}{1} \times \frac{5}{34} = \frac{3 \,.\, 17 \times 5}{1 \times 2 \,.\, 17};$$

$$\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} = x.$$

IV. Man dividire $41\frac{2}{9}$ durch $13\frac{1}{4}$.

Auflösung.

$$41\frac{2}{9} : 13\frac{1}{4} = x;$$

$$\frac{371}{9} : \frac{53}{4} = \frac{371}{9} \times \frac{4}{53} = \frac{7 \,.\, 53 \times 4}{9 \times 53};$$

$$\frac{28}{9} = 3\frac{1}{9} = x.$$

V. Man dividire $4\frac{8}{15}$ durch $\frac{17}{25}$; $\frac{64}{91}$ durch $14\frac{10}{13}$; $15\frac{6}{7}$ durch $3\frac{11}{21}$.

Auflösung zur Uebung.

§. 62.

XI. Aufgabe.

Einen Bruchsbruch (irregulären oder zusammengesetzten Bruch §. 49. 4 b) in einen einfachen Bruch zu verwandeln.

Auflösung.

1) Man löse den gebrochenen Bruch oder Bruchsbruch in eine Division auf.

2) Man theile den Zähler des gebrochenen Bruches durch den Nenner nach den (§. 61) gegebenen Regeln.

* Da der Zähler und Nenner, oder einer von beiden (§. 49. 4. b) ganze und gebrochene Größen sein können, so schließt man, um jeden Irrthum zu vermeiden, die den Hauptzähler oder Hauptnenner bildenden Größen in Klammern ein.

Beispiele.

I. Man löse $\frac{3}{\left(\frac{4}{5}\right)}$ in einen einfachen Bruch auf.

Auflösung.

$$\frac{3}{\left(\frac{4}{5}\right)} = x;$$

$$3 : \frac{4}{5} = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4} = x;$$

$$3\frac{3}{4} = x.$$

II. Man löse $\frac{\left(\frac{7}{9}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}$ in einen einfachen Bruch auf.

Auflösung.

$$\frac{\left(\frac{7}{9}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)} = x;$$

$$\frac{7}{9} : \frac{1}{3} = \frac{7}{9} \times \frac{3}{1} = \frac{7 \times 3}{3 \times 3} = \frac{7}{3};$$

$$2\frac{1}{3} = x.$$

III. $\frac{\left(1\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)}$ soll in einen einfachen Bruch aufgelöst werden.

Auflösung.

$$\frac{\left(1\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)} = x;$$

$$1\frac{1}{5} : \frac{2}{3} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{18}{10};$$

$$\frac{9}{5} = 1\frac{4}{5} = x.$$

IV. $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(7\frac{1}{2}\right)}$ werde aufgelöst in einen einfachen Bruch.

Auflösung.

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(7\frac{1}{2}\right)} = x;$$

$$\frac{3}{4} : 7\frac{1}{2} = \frac{3}{4} : \frac{15}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{15};$$

$$\frac{3 \times 2 \,.\, 1}{2 \,.\, 2 \times 3 \,.\, 5} = \frac{1}{2 \,.\, 5} = \frac{1}{10} = x.$$

Man löse in einfache Brüche auf:

V. $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}$; VI. $\dfrac{\left(\frac{17}{18}\right)}{\left(3\frac{7}{9}\right)}$; VII. $\dfrac{\left(16\frac{1}{3}\right)}{\left(2\frac{33}{63}\right)}$; VIII. $\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{11}{13} \times \frac{143}{242}\right)}$;

IX. $\dfrac{\left(\frac{68}{99}\right)}{\left(2\frac{23}{77}\right)}$; X. $\dfrac{\left(\dfrac{\left(17\frac{3}{4}\right)}{\left(15\frac{7}{9}\right)}\right)}{\left(\frac{72}{81}\right)}$.

Auflösung zur Uebung.

§. 63.

Sätze.

Für die Multiplication und Division mit ächten Brüchen sind noch folgende zwei Sätze zu merken:

I. Wenn der eine Factor ein ächter Bruch ist, so ist das Produkt immer kleiner als der andere Factor, letzterer mag eine gebrochene, eine ganze oder eine gemischte Zahl sein.

Beweis.

1) Es ist klar, daß, je kleiner die Factoren sind, desto kleiner ihr Produkt wird (§. 19. b). Z. B.

$$8 \times 9 = 72;$$
$$6 \times 7 = 42;$$
$$4 \times 5 = 20;$$
$$3 \times 2 = 6.$$
$$6 < 20 < 42 < 72.$$

Multiplicirt man was immer für eine Größe mit 1, so bleibt diese unverändert (§. 19. 4). Z. B.

$$8 \times 1 = 8,$$
$$\frac{5}{7} \times 1 = \frac{5}{7}.$$
$$\frac{3}{11} \times 1 = \frac{3}{41}.$$

In einem ächten Bruch aber ist der Werth des Bruches kleiner als Eins, daher muß,

a) weil kleinere Factoren ein kleineres Produkt geben, und

b) weil ein Factor, mit Eins multiplicirt, nicht vergrößert wird, sondern sich gleich bleibt,

ein Factor, mit einem ächten Bruche multiplicirt, in seinem Werthe vermindert werden.

2) Die Multiplication mit einem Bruche ist zusammengesetzt aus der Multiplication mit dem Zähler, und aus der Division durch den Nenner.

Wenn nun eine Zahl mit einer kleinen multiplicirt und mit einer größern Zahl dividirt wird, so muß das Produkt kleiner werden, als jene Zahl. Bei der Multiplication mit ächten Brüchen geschieht aber dieses, da der Zähler (multiplicator) kleiner ist, als der Nenner (divisor); daher muß durch die Multiplication mit einem ächten Bruche der andere Factor vermindert werden. Z. B.

I. $$\frac{7}{8} \times \frac{16}{21} = x;$$

$$\frac{7 \times 8 \cdot 2}{8 \times 7 \cdot 3} = \frac{2}{3} = x;$$

$\frac{7}{8}$ und $\frac{16}{21}$ sind ächte Brüche; es muß also $\frac{2}{3}$ kleiner sein, als $\frac{7}{8}$ und eben so kleiner, als $\frac{16}{21}$.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24};$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}; \text{ also}$$

$$\frac{16}{24} < \frac{21}{24} \text{ oder}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{7}{8}.$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21}, \text{ und}$$

$$\frac{14}{21} < \frac{16}{21}, \text{ oder}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{16}{21}.$$

II. $$8 \times \frac{15}{16} = x;$$

$$\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} = x;$$

$$7\frac{1}{2} < 8.$$

III. $$13\frac{1}{2} \times \frac{7}{9} = x;$$

$$\frac{27}{2} \times \frac{7}{9} = \frac{3 \cdot 9 \times 7}{2 \times 9} = \frac{21}{2};$$

$$\frac{21}{2} = 10\frac{1}{2} = x;$$

$$10\frac{1}{2} < 13\frac{1}{2}.$$

II. Wenn bei der Division mit Brüchen der Divisor ein ächter Bruch ist, so wird der Quotient immer größer, als das Dividend ist.

Beweis.

Bei einem ächten Bruch ist der Nenner größer, als der Zähler. Mit dem Nenner des Divisorbruches wird der Zähler

des Dividendbruches vermehrt, und durch den Zähler des Divisorbruches wird das Produkt aus dem Dividendszähler und Divisorsnenner getheilt; folglich muß der Quotus größer werden, als das Dividend ist,

a) weil, je kleiner der Divisor ist, desto größer der Quotus wird, und

b) weil jede Zahl durch die Einheit getheilt sich selbst zum Quotus gibt (§. 21. 4). Z. B.

I. $$\frac{7}{8} : \frac{21}{64} = x;$$
$$\frac{7}{8} \times \frac{64}{21} = x;$$
$$\frac{7 \times 8 . 8}{8 \times 7 . 3} = x;$$
$$2\frac{2}{3} = x;$$
$$2\frac{2}{5} > \frac{7}{8}.$$

II. $$27 : \frac{3}{5} = x;$$
$$\frac{27}{1} : \frac{3}{5} = x;$$
$$\frac{27}{1} \times \frac{3}{5} = x;$$
$$\frac{9 . 3 \times 5}{3} = x;$$
$$45 = x;$$
$$45 > 27.$$

III. $$5\frac{3}{8} : \frac{5}{8} = x;$$
$$\frac{43}{8} : \frac{5}{8} = x;$$
$$\frac{43}{5} = x;$$
$$8\frac{3}{5} = x;$$
$$8\frac{3}{5} > 5\frac{3}{8}.$$

* Division und Multiplication dienen sich auch hier gegenseitig zur Probe.

B.

Von den gemeinen, angewandten, gebrochenen Zahlen (§. 34. 2. α).

AA. Resolvirung und Reducirung benannter Brüche.

§. 64.

Resolvirung (§. 33. 4. I).

Aufgabe.

Jede benannte gebrochene Zahl höherer Ordnung in die enthaltenen niederen Einheiten aufzulösen.

Auflösung.

Man multiplicire den Zähler des gegebenen benannten Bruches mit einem Ganzen seiner Ordnung (§. 33. 1. *), in den Einheiten der niederen Ordnung ausgedrückt, in welche der Bruch aufgelöst werden soll, und dividire das Produkt durch den Nenner.

Beispiele.

I. Es sollen $4\frac{3}{4}$ Jahre in Monate aufgelöst werden.

Auflösung.

$$4\frac{2}{3} \times 12 = x;$$

$$\frac{14}{3} \times \frac{12}{1} = \frac{168}{3} = 56; \text{ d. i.}$$

$$4\frac{2}{3} \text{ Jahre} = 56 \text{ Monate.}$$

II. Es sollen $2\frac{2}{3}$ Ruthen Duodec. in Schuhe aufgelöst werden.

Auflösung.

$$3\frac{2}{3} \times 12 = x;$$

$$\frac{11}{3} \times \frac{12}{1} = \frac{11 \times 4 \,.\, 3}{3 \times 1} = 44; \text{ d. i.}$$

$$3\frac{2}{3} \text{ Ruth. Duodec.} = 44'.$$

III. Es seien $\frac{3}{4}$ Zentner in ℔. aufzulösen.

Auflösung.

$$\frac{3}{4} \times 100 = x;$$

$$\frac{300}{4} = 75; \text{ d. i.}$$

$$\frac{3}{4} \text{ Zt.} = 75 \text{ ℔.}$$

IV. $\frac{2}{3}$ fl. seien in kr. aufzulösen.

Auflösung.

$$\frac{2}{3} \times 60 = x;$$

$$\frac{2 \times 60}{3} = \frac{2 \times 3 \cdot 20}{3} = 40; \text{ d. i.}$$

$$\frac{2}{3} \text{ fl.} = 40 \text{ kr.}$$

V. Es seien $5\frac{1}{4}$ Jahre in Wochen aufzulösen.

VI. $6\frac{4}{5}$ Ruthen Dec. seien in Fuße aufzulösen.

VII. $\frac{4}{5}$ Ztr. sollen in Lothe aufgelöst werden.

VIII. Es sollen $7\frac{1}{2}$ Bayerthaler in Gulden aufgelöst werden.

§. 65.

Reduction (§. 33. 4. II).

Aufgabe.

Einheiten einer niedrigern Ordnung als eine gebrochene Zahl höherer Ordnung darzustellen.

Auflösung.

Man betrachte die gegebenen Einheiten niederer Ordnung als den Zähler eines Bruches, und schreibe unter diesen Zähler als Nenner jene Zahl, die den Inbegriff der Einheiten niederer Ordnung angibt, welche eine Einheit höherer Ordnung in sich schließt (§. 33. 3). Darnach vereinfache man den so erhaltenen Bruch (wenn es sein kann), und gebe der

so aus der niederen in die höhere Ordnung übergegangenen Größe die Benennung der höheren Ordnung.

Beispiele.

I. Es sollen 39 Wochen in einem Jahrbruche ausgedrückt werden.

Auflösung.

$$\frac{39}{52} = x;$$

$$\frac{39 : 13}{52 : 13} = \frac{3}{4}; \text{ d. i.}$$

$$39 \text{ Wochen} = \frac{3}{4} \text{ Jahr.}$$

II. 8 Fuße sollen in einem Ruthenbruch Duodec. ausgedrückt werden.

Auflösung.

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = x; \text{ d. i.}$$

$$8 \text{ Fuß} = \frac{2}{3} \text{ Ruthen Duodec.}$$

III. Es sollen 4 Metzen in einem Schäffelbruch dargestellt werden.

Auflösung.

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = x; \text{ d. i.}$$

$$4 \text{ Metzen} = \frac{2}{3} \text{ Schäffel.}$$

IV. Man drücke 80 ℔. in einem Zentnerbruche aus.

Auflösung.

$$\frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = x; \text{ d. i.}$$

$$80 \text{ ℔.} = \frac{4}{5} \text{ Ztr.}$$

V. Man drücke 45 kr. in einem Guldenbruche aus.

Auflösung.

$$\frac{45}{60} = \frac{3}{4} = x; \text{ d. i.}$$

$$45 \text{ kr.} = \frac{3}{4} \text{ fl.}$$

VI. Es sollen 9 Monate in einem Jahrbruch ausgedrückt werden.

VII. Man drücke 15 Fuß in einem Ruthenbruch Decimal aus.

VIII. Es sollen 48 Maaß in einem Eimerbruch ausgedrückt werden.

IX. Man drücke 2400 Loth in einem Zentnerbruch aus.

X. Es sollen 36 kr. in einem Guldenbruch dargestellt werden.

BB. Die Grundrechnungsarten mit benannten Zahlen in Beispielen.

§. 66.

Additions-Beispiele mit Auflösungen.

I. Jemand arbeitete $4\frac{1}{2}$ Wochen, $6\frac{1}{3}$ Wochen, $\frac{1}{12}$ Woche, $8\frac{5}{6}$ Wochen und $7\frac{1}{4}$ Wochen an einem Orte; wie viele Zeit macht dieses?

Auflösung.

$$4\frac{1}{2} + 6\frac{1}{3} + 8\frac{5}{6} + 7\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = x;$$

$$4 + 6 + 8 + 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = x;$$

$$25 + \frac{12 + 8 + 20 + 6 + 2}{24} = 25 + \frac{48}{24};$$

$$25 + 2 = x; \text{ d. i.}$$

27 Wochen.

II. Ein Handelsmann verkaufte von einem Stück Tuch $4\frac{1}{2}$ Ell., $3\frac{2}{3}$ Ell., $5\frac{3}{4}$ Ell., $10\frac{5}{8}$ Ell., $6\frac{3}{5}$ Ell. und $7\frac{5}{6}$ Ell.; er hat aber noch einen Rest von $2\frac{21}{40}$ Ellen. Wie groß war das Stück Tuch.

Auflösung.

$$4\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} + 5\frac{13}{4} + 10\frac{5}{8} + 6\frac{3}{5} + 7\frac{5}{6} + 2\frac{21}{40} = x;$$

$$4 + 3 + 5 + 10 + 6 + 7 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$$

$$+ \frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{21}{40} = x;$$

$$37 + \frac{4}{8} + \frac{6}{8} + \frac{5}{8} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{24}{40} + \frac{21}{40} = x;$$

$$37 + \frac{15}{8} + \frac{9}{6} + \frac{45}{40} = 37 + \frac{15}{8} + \frac{3}{2} + \frac{9}{8};$$

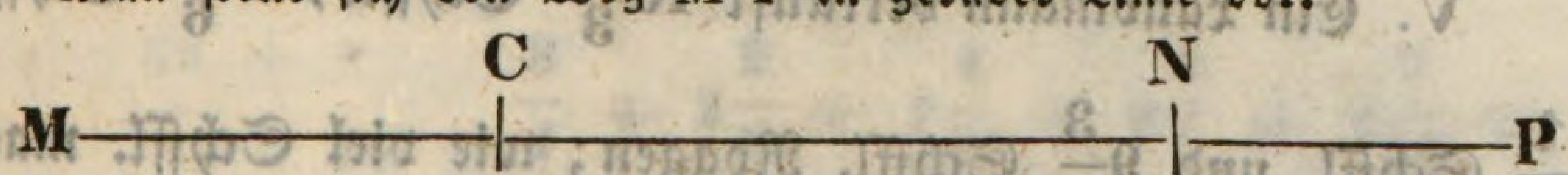
$$37 + \frac{15 + 12 + 9}{8} = 37 + \frac{36}{8} = 37 + 4 + \frac{4}{8};$$ d. i.

$$x = 41\frac{1}{2} \text{ Ellen.}$$

III. Zwei Reisende A und B treffen sich in einem Orte C. Hier sagte A dem B, er komme vom Orte M, und wolle nach dem Orte P gehen, welcher Ort von M $10\frac{1}{2}$ Meilen weiter entfernt liegt, als der Ort N, aus welchem B nach C kam. Wenn nun A nach C $15\frac{3}{4}$ Meilen, und B nach C $18\frac{5}{8}$ Meilen hatte, welches ist der Weg von M nach P?

Auflösung.

Man stelle sich den Weg M P in gerader Linie vor.



$$MC = 15\frac{3}{4} \text{ Meilen,}$$

$$CN = 18\frac{5}{8} \quad „$$

$$NP = 10\frac{1}{2} \quad „ \quad \text{und somit}$$

$$MC + CN + NP = MP, \text{ oder}$$

$$15\frac{3}{4} + 18\frac{5}{8} + 10\frac{1}{2} = x;$$

$$15 + 18 + 10 + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2} = x;$$

$$43 + \frac{6}{8} + \frac{5}{8} + \frac{4}{8} = 43 + \frac{15}{8};$$

$$44 + \frac{7}{8} = x; \text{ also}$$

$$MP = 44\frac{7}{8} \text{ Meilen.}$$

IV. Jemand kauft zu einem Landgut folgende Aecker: den Acker A = $4\frac{1}{2}$ Tagw., den Acker B = $9\frac{2}{3}$ Tagw., den Acker C = $7\frac{3}{4}$ Tagw. und den Acker D = $6\frac{3}{5}$ Tagw.; um wie viele Tagw. hat er durch diese Ankäufe sein Landgut vergrößert?

Auflösung.

$$4\frac{1}{2} + 9\frac{2}{3} + 7\frac{3}{4} + 6\frac{3}{5} = x;$$

$$4 + 9 + 7 + 6 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = x;$$

$$26 + \frac{30 + 40 + 45 + 36}{60} = 26 + \frac{151}{60};$$

$$26 + 2 + \frac{31}{60} = 28\frac{31}{60}; \text{ d. h.}$$

$$28\frac{31}{60} \text{ Tagw.}$$

V. Ein Landmann verkauft $10\frac{2}{3}$ Schffl., $8\frac{5}{6}$ Schffl., $7\frac{1}{2}$ Schffl. und $9\frac{3}{4}$ Schffl. Roggen; wie viel Schffl. macht dieses?

Auflösung.

$$10\frac{2}{3} + 8\frac{5}{6} + 7\frac{1}{2} + 9\frac{3}{4} = x;$$

$$10 + 8 + 7 + 9 + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = x;$$

$$34 + \frac{4 + 5 + 3}{6} + \frac{3}{4} = 34 + \frac{12}{6} + \frac{3}{4};$$

$$34 + 2 + \frac{3}{4} = 36\frac{3}{4}; \text{ d. i.}$$

$$36\frac{3}{4} \text{ Schäffel.}$$

VI. Ein Krämer verkauft $\frac{3}{4}$ Ztr., $1\frac{1}{2}$ Ztr., $3\frac{2}{5}$ Ztr., $\frac{7}{8}$ Ztr. und $9\frac{7}{16}$ Ztr. Zucker; wie viele Ztr. macht dieses?

Auflösung.

$$\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2} + 3\frac{2}{5} + \frac{7}{8} + 9\frac{7}{16} = x;$$

$$1 + 3 + 9 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{7}{8} + \frac{7}{16} = x;$$

$$13 + \frac{12 + 8 + 14 + 7}{16} + \frac{2}{5} = x;$$

$$13 + \frac{41}{16} + \frac{2}{5} = 13 + 2 + \frac{9}{16} + \frac{2}{5};$$

$$15 + \frac{45 + 32}{80} = 15\frac{77}{80}; \text{ d. i.}$$

$15\frac{77}{80}$ Ztr.

VII. Jemand besitzt $\frac{3}{4}$ fl., $4\frac{2}{3}$ fl., $7\frac{1}{2}$ fl., $6\frac{4}{5}$ fl. und $9\frac{7}{10}$ fl.; wie groß ist sein Vermögen?

Auflösung.

$$\frac{3}{4} + 4\frac{2}{3} + 7\frac{1}{2} + 6\frac{4}{5} + 9\frac{7}{10} = x;$$

$$4 + 7 + 6 + 9 + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10} = x;$$

$$26 + \frac{15 + 10 + 16 + 14}{20} + \frac{2}{3} = x;$$

$$26 + \frac{55}{20} + \frac{2}{3} = 26 + 2 + \frac{15}{20} + \frac{2}{3};$$

$$28 + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = 28 + \frac{9 + 8}{12};$$

$$28 + 1 + \frac{5}{12} = 29\frac{5}{12}; \text{ d. i.}$$

29 fl. 25 kr.

§. 67.

Subtractions-Beispiele mit Auflösungen.

I. Peter ist $21\frac{1}{2}$ Jahr alt. Wie alt ist Paulus, welcher $4\frac{2}{3}$ Jahr nach Peter geboren wurde?

Auflösung.

$$21\frac{1}{2} - 4\frac{2}{3} = x;$$

$$21\frac{3}{6} - 4\frac{4}{6} = 20\frac{9}{6} - 4\frac{4}{6};$$

$$16\frac{5}{6} = x;$$

Paulus ist also 16 Jahr 10 Monate alt.

II. Ein Handelsmann verkauft von einem Stück Tuch, welches $33\frac{1}{3}$ Ellen lang ist, $7\frac{5}{6}$ Ellen und $3\frac{3}{4}$ Ellen; wie viel bleibt ihm noch?

Auflösung.

$$33\frac{1}{3} - 7\frac{5}{6} - 3\frac{3}{4} = x;$$

$$33\frac{1}{3} - \left(7\frac{5}{6} + 3\frac{3}{4}\right) = x;$$

$$33\frac{1}{3} - \left(10 + \frac{5}{6} + \frac{3}{4}\right) = x;$$

$$33\frac{1}{3} - \left(10 + \frac{20 + 18}{24}\right) = x;$$

$$33\frac{1}{3} - \left(11 + \frac{14}{24}\right) = 33\frac{4}{12} - 11\frac{7}{12};$$

$$22\frac{4}{12} - \frac{7}{12} = 21\frac{16}{22} - \frac{7}{12};$$

$$21\frac{9}{12} = 21\frac{3}{4};\ \text{d. i.}$$

$21\frac{3}{4}$ Ellen hält der Rest.

III. Ein Landmann verkauft von seinen $83\frac{3}{5}$ Tagwerk

Feldern den Acker A = $7\frac{1}{2}$ Tagw., den Acker B = $9\frac{2}{3}$ Tagw., den Acker C = $5\frac{3}{4}$ Tagw., den Acker D = $3\frac{1}{30}$ Tagw. und den Acker E. = $3\frac{3}{5}$ Tagwerk. Wie viele Tagwerke bleiben ihm noch?

Auflösung.

$$83\frac{4}{5} - 7\frac{1}{2} - 9\frac{2}{3} - 5\frac{3}{4} - 3\frac{3}{5} - 3\frac{1}{30} = x;$$

$$80\frac{1}{5} - \left(7\frac{1}{2} + 9\frac{2}{3} + 5\frac{3}{4} + 3\frac{1}{30}\right) = x;$$

$$80\frac{1}{5} - \left(7 + 9 + 5 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{30}\right) = x;$$

$$80\frac{1}{5} - \left(24 + \frac{6 + 8 + 9}{12} + \frac{1}{30}\right) = x;$$

$$80\frac{3}{5} - \left(24 + \frac{23}{12} + \frac{1}{30}\right) = 80\frac{1}{5} - 24 - \left(\frac{23}{12} + \frac{1}{30}\right);$$

$$56\frac{1}{5} - \left(1 + \frac{11}{12} + \frac{1}{30}\right) = 56\frac{1}{5} - - \left(\frac{330 + 12}{360}\right);$$

$$55\frac{1}{5} - \frac{342}{360} = 54\frac{6}{5} - \frac{342}{360};$$

$$54 + \frac{6 . 72}{360} - \frac{342}{360} = 54 + \frac{432}{360} - \frac{342}{360};$$

$$54 + \frac{90}{360} = 54 + \frac{1}{4} = 54\frac{1}{4};$$ d. i.

$54\frac{1}{4}$ Tagwerk.

IV. Ein Krämer verkauft von $5\frac{3}{4}$ Ztr. Zucker 1 Ztr. 25 ℔. und 3 Ztr. 25 ℔. Wie viel bleibt ihm noch?

Auflösung.

$$5\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2} = x;$$

$$4\frac{2}{4} - 3\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2};$$

$$1 = x.$$

V. Ein Landmann verkauft von 72 Schäffel 5 Metzen Korn $6\frac{1}{2}$ Schffl., $8\frac{2}{3}$ Schffl., 15 Schffl. $3\frac{1}{2}$ Mtz. und 22 Schffl. $2\frac{1}{2}$ Metzen. Wie viele Schäffel bleiben ihm noch?

Auflösung.

$$72\frac{5}{6} - 6\frac{1}{2} - 8\frac{2}{3} - 15\frac{7}{12} - 22\frac{5}{12} = x;$$

$$72\frac{5}{6} - \left(6\frac{1}{2} + 8\frac{2}{3} + 15\frac{7}{12} + 22\frac{5}{12}\right) = x;$$

$$72\frac{5}{6} - \left(6 + 8 + 15 + 22 + \frac{3+4}{6} + \frac{7+5}{12}\right) = x;$$

$$72\frac{5}{6} - \left(51 + \frac{7}{6} + 1\right) = 72\frac{5}{6} - \left(52 + 1 + \frac{1}{6}\right) = x;$$

$$72\frac{5}{6} - 53\frac{1}{6} = 19\frac{4}{6} = 19\frac{2}{3};$$

Es bleiben noch 19 Schäffel 4 Metzen.

VI. Jemand hat einzufordern 6 fl. 40 kr., 8 fl. 36 kr., 13 fl. 50 kr., 9 fl. 18 kr., 4 fl. 48 kr. und 11 fl. 45 kr.; schuldet aber dagegen 27 fl. 10 kr., 3 fl. 15 kr., 1 fl. 24 kr. und 5 fl. 30 kr. Wie viel hat er mehr zu fordern als zu zahlen?

Auflösung.

$$6\frac{2}{3} + 13\frac{5}{6} + 8\frac{3}{5} + 9\frac{3}{10} + 4\frac{4}{5} + 11\frac{3}{4} - 27\frac{1}{6} - 3\frac{1}{4}$$
$$- 1\frac{2}{5} - 5\frac{1}{2} = x;$$

$$6\frac{4}{6} + 13\frac{5}{6} + 8\frac{6}{10} + 9\frac{3}{10} + 4\frac{16}{20} + 11\frac{15}{20} - 27\frac{5}{30} - 1\frac{12}{30}$$
$$- 3\frac{1}{4} - 5\frac{2}{4} = 19\frac{9}{6} + 17\frac{9}{10} + 15\frac{31}{20} - 28\frac{17}{30} - 8\frac{3}{4};$$

$$20\frac{10}{20} + 17\frac{18}{20} + 16\frac{11}{20} - 28\frac{17}{30} - 8\frac{15}{20} = x;$$

$$53\frac{39}{20} - 28\frac{17}{30} - 8\frac{15}{20} = 45\frac{24}{20} - 28\frac{17}{30};$$

$$45\frac{6}{5} - 28\frac{17}{30} = 45\frac{36}{30} - 28\frac{17}{30} = 17\frac{19}{33}; \text{ d. i.}$$

$$x = 17 \text{ fl. } 38 \text{ kr.}$$

§. 68.

Multiplications-Beispiele von benannten Zahlen.

I. Jemand kaufte $9\frac{3}{4}$ Ellen Tuch, die Elle um $5\frac{1}{3}$ fl.; wie viele Gulden mußte er dafür bezahlen?

Auflösung.

$$9\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3} = x;$$

$$\frac{39}{4} \times \frac{16}{3} = \frac{3\,.\,13 \times 4\,.\,4}{4 \times 3} = 52; \text{ d. i.}$$

52 fl.

II. Welches ist in □° der Flächeninhalt eines Rechteckes, welches 19° 5′ Decim. lang und $13\frac{1}{3}$° Decim. breit ist?

Auflösung.

$$19\frac{1}{2} \times 13\frac{1}{3} = x;$$

$$\frac{39}{2} \times \frac{40}{3} = \frac{13\,.\,3 \times 2\,.\,20}{2 \times 3} = 13\,.\,20;$$

260 □° Decim. = x.

III. Welches ist der kubische Inhalt eines Körpers, welcher $3\frac{1}{2}$′ lang, $2\frac{1}{7}$′ breit und $5\frac{1}{3}$′ hoch ist?

Auflösung.

$$3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{7} \times 5\frac{1}{3} = x;$$

$$\frac{7}{2} \times \frac{15}{7} \times \frac{16}{3} = \frac{5\,.\,3 \times 2\,.\,8}{2 \times 3} = 5 \times 8;$$

40 c′ = x.

IV. Ein Weinwirth verkauft $1\frac{1}{4}$ Eimer Wein, die Maaß um $2\frac{2}{5}$ fl.; $1\frac{1}{2}$ Eimer, die Maaß um $1\frac{2}{3}$ fl. und $4\frac{2}{3}$ Eimer, die Maaß um $2\frac{1}{7}$ fl. Wie viele Gulden nimmt er für alle Weine ein?

Auflösung.

$$\left(\left(1\frac{1}{4}\times 2\frac{2}{5}\right)+\left(1\frac{1}{2}\times 1\frac{2}{3}\right)+\left(4\frac{2}{3}\times 2\frac{1}{7}\right)\right)\times 60 = x;$$

$$\left(\left(\frac{5}{4}\times\frac{12}{5}\right)+\left(\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{14}{3}\times\frac{15}{7}\right)\right)\times 60 = x;$$

$$\left(\frac{12}{4}+\frac{5}{2}+\left(\frac{2\times 15}{3}\right)\right)\times 60 = \left(3+2\frac{1}{2}+10\right)\times 60;$$

$$15\frac{1}{2}\times 60 = \frac{31}{2}\times 60 = 31\times 30;$$

$$930 = x.$$

V. Jemand hat $3\frac{1}{3}$ Bayerthlr., $4\frac{3}{5}$ fl., $7\frac{1}{6}$ Rchsthlr., $5\frac{1}{2}$ Karolin, $6\frac{1}{4}$ Kronenthlr. und 3 Vierundzwanziger; wie groß ist sein Vermögen in fl.?

Auflösung.

$$\left(3\frac{1}{3}\times 2\frac{2}{5}\right)+4\frac{3}{5}+\left(7\frac{1}{6}\times 1\frac{1}{2}\right)+\left(5\frac{1}{2}\times 11\right)$$
$$+\left(6\frac{1}{4}\times 2\frac{7}{10}\right)+\left(\frac{3\times 24}{60}\right) = x;$$

$$\left(\frac{10}{3}\times\frac{12}{5}\right)+\frac{23}{5}+\left(\frac{43}{6}\times\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{11}{2}\times 11\right)$$
$$+\left(\frac{25}{4}\times\frac{27}{10}\right)+\frac{72}{60} = x;$$

$$(2\,.\,4)+\frac{23}{5}+\frac{43}{4}+\frac{121}{2}+\frac{135}{8}+\frac{6}{5} = x;$$

$$8+4\frac{3}{5}+10\frac{3}{4}+60\frac{1}{2}+16\frac{7}{8}+1\frac{1}{5} = x;$$

$$8+4+10+60+16+1+\frac{3}{5}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{7}{8}+\frac{1}{5} = x;$$

$$99+\frac{24+30+20+35+8}{40} = 99+\frac{117}{40};$$

$$99+2+\frac{37}{40} = 101\frac{37}{40};$$ also

$$101 \text{ fl. } 55\frac{1}{2} \text{ kr.}$$

§. 69.

Divisions-Beispiele von benannten Brüchen.

I. Wenn ein Reisender von A nach B gehen will, welche Orte $42\frac{1}{2}$ Meilen von einander entfernt liegen, und täglich $5\frac{2}{3}$ Meilen macht, wie viele Tage braucht er?

Auflösung.

$$42\frac{1}{2} : 5\frac{2}{3} = x;$$

$$\frac{85}{2} : \frac{17}{3} = \frac{85}{2} \times \frac{3}{17} = \frac{5 \,.\, 17 \times 3}{2 \times 17};$$

$$\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2};$$

Er braucht $7\frac{1}{2}$ Tage.

II. Wie oft können von $332\frac{1}{2}$ Ell. Tuch $17\frac{1}{2}$ Ellen abgeschnitten werden?

Auflösung.

$$332\frac{1}{2} : 17\frac{1}{2} = x;$$

$$\frac{665}{2} : \frac{35}{2} = \frac{665}{2} \times \frac{2}{35} = \frac{665}{35} = 19; \text{ d. i.}$$

19 mal.

III. Ein Grundstück von $2\frac{1}{2}$ Tagwerk ist $36° \, 3\frac{7}{11}'$ Duodecimal lang; welches ist seine Breite?

Auflösung.

$$\left(2\frac{1}{2} \times 40000\right) : 363\frac{7}{11} = x;$$

$$\left(\frac{5}{2} \times 40000\right) : \frac{4000}{11} = \frac{5 \,.\, 40000}{2} \times \frac{11}{4000};$$

$$\frac{5 \,.\, 10 \,.\, 4000}{2} \times \frac{11}{4000} = \frac{5 \,.\, 5 \,.\, 2}{2} \times \frac{11}{1} = 25 \times 11;$$

$$275 = x.$$

Die Breite ist also $= 275'$ oder $27° \, 5'$.

IV. Wie viele Klafter enthält ein Holzstoß, welcher $21\frac{1}{3}'$ lang, $10\frac{1}{2}'$ hoch ist, wenn das Holz die gesetzliche bayerische Scheiterlänge hat?

Auflösung.

$$\left(21\frac{1}{3} \times 10\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}\right) : \left(6 \times 6 \times 3\frac{1}{2}\right) = x;$$

$$\left(\frac{34}{3} \times \frac{21}{2} \times \frac{7}{2}\right) : \left(36 \times \frac{7}{2}\right) = \frac{16.4 \times 3.7 \times 7}{3 \times 2 \times 2} : \left(18 \times 7\right);$$

$$(16 \times 7 \times 7) : (18 \times 7) = (2.8 \times 7) : (2.9) = 56 : 9;$$

$$6\frac{2}{9} = x;$$ d. i. $6\frac{2}{9}$ Klafter.

V. Wie oft können von 2 Ztr. $56\frac{1}{2}$ ℔. Zucker $9\frac{1}{2}$ ℔. verkauft werden?

Auflösung.

$$256\frac{1}{2} : 9\frac{1}{2} = x;$$

$$\frac{513}{2} : \frac{19}{2} = 513 : 19 = 27;$$ d. h.

27 mal.

VI. Wenn eine Bouteille $\frac{7}{8}$ bayerische Maaß hält; wie viele Bouteillen lassen sich von einem Fasse abzapfen, welches $45\frac{1}{2}$ Maaß in sich faßt?

Auflösung.

$$45\frac{1}{2} : \frac{7}{8} = x;$$

$$\frac{91}{2} : \frac{7}{8} = \frac{13.7}{2} \times \frac{2.4}{7} = 13.4;$$

$$52 = x;$$ also

52 Bouteillen.

VII. Wie lange wird ein Taglöhner zu arbeiten haben an dem Auswerfen eines Grabens, welcher $3\frac{9}{10}$ Ruthen (Decimal) lang, $4\frac{1}{2}'$ breit und $6\frac{2}{3}'$ tief ist; wenn er in einem

Tage einen Graben auswirft, welcher $6\frac{1}{2}'$ lang, $3\frac{3}{5}'$ breit und $5\frac{1}{4}'$ tief ist?

Auflösung.

$$\left(\left(3\frac{9}{10}\times 10\right)\times 4\frac{1}{2}\times 6\frac{2}{3}\right):\left(6\frac{1}{2}\times 3\frac{3}{5}\times 5\frac{1}{4}\right)=x;$$

$$\left(39\times\frac{9}{2}\times\frac{20}{3}\right):\left(\frac{13}{2}\times\frac{18}{5}\times\frac{21}{4}\right)=x;$$

$$\left(\frac{39}{1}\times\frac{3.\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{10.\cancel{2}}{\cancel{3}}\right):\left(\frac{13}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}.9}{5}\times\frac{21}{4}\right)=x;$$

$$\left(39\times 30\right):\left(\frac{13\times 9\times 21}{20}\right)=\left(\cancel{13}.\cancel{3}\times\cancel{3}.10\right)\times\frac{20}{\cancel{13}\times\cancel{3}.\cancel{3}\times 21};$$

$$\frac{10\times 20}{21}=\frac{200}{21}=9\frac{11}{21}\,x.$$

Beinahe $9\frac{1}{2}$ Tage.

VIII. Jemand soll 868 fl. 48 kr. in Bayerthalern bezahlen; wie viele Bayerthaler braucht er?

Auflösung.

$$868\frac{4}{5}:2\frac{2}{5}=x;$$

$$\frac{4344}{5}:\frac{12}{5}=\frac{4344}{12}=362=x.$$

Er braucht 362 Bayerthaler.

IX. Es sollen 224 fl. 6 kr. in Kronenthalern bezahlt werden; wie viele Stücke sind nöthig?

Auflösung.

$$224\frac{1}{10}:2\frac{7}{10}=x;$$

$$\frac{2241}{10}:\frac{27}{10}=\frac{2241}{27}=83=x.$$

Man braucht 83 Stücke.

X. Ein Studirender fragte seinen Lehrer, wie viele Fehler er in seiner letzten Schulaufgabe habe; der Lehrer antwortete ihm, die Zahl deiner Fehler erfährst du, wenn du den Quotus $16\frac{1}{3}$ getheilt durch 7, durch $2\frac{1}{3}$ dividirst, und

von diesem Quotienten einen andern Quotus abziehst, welcher erhalten wird, wenn man den Bruchsbruch $\frac{\left(16\frac{1}{5}\right)}{27}$ durch $\frac{51}{85}$ dividirt. Wie heißt diese Zahl?

Auflösung.

$$\frac{\left(\frac{\left(16\frac{1}{3}\right)}{7}\right)}{\left(2\frac{1}{3}\right)} - \frac{\left(\frac{\left(16\frac{1}{5}\right)}{27}\right)}{\left(\frac{51}{85}\right)} = x;$$

$$\left(\left(\frac{\left(\frac{49}{3}\right)}{7}\right) : \frac{7}{3}\right) - \left(\frac{\left(\frac{81}{5}\right)}{27} : \frac{3}{5}\right) = x;$$

$$\left(\frac{49}{21} \times \frac{3}{7}\right) - \left(\frac{81}{5 . 27} \times \frac{5}{3}\right) = x;$$

$$\left(\frac{7 . 7}{7 . 3} \times \frac{3}{7}\right) - \left(\frac{3 . 27}{5 . 27} \times \frac{5}{3}\right) = x;$$

$$1 - 1 = 0 = x.$$

III. Hauptstück.

Von den besonderen Brüchen.

I. Abtheilung.

Von den Decimalbrüchen.

A.

Von den unbenannten Decimalbrüchen.

AA. Erklärungen, Sätze und Aufgaben.

§. 70.

Erklärungen.

1) Decimalbrüche oder zehntheilige Brüche sind jene Brüche, welche zum Nenner die Einheit (= 1) mit angehängten Nullen haben, bei welchen also der Nenner

Zehn (= 10), oder ein solches Produkt ist, zu welchem Zehn mehrmal als Factor genommen wurde (10^n).

2) Die Decimalbrüche beruhen ganz auf dem Decimalsysteme (§. 11. 3.), oder auf den willkührlichen Annahmen, auf welche die Decadic selber basirt ist,

a) daß man in der ersten Ordnung bis Zehn zählt, und in den folgenden höhern Ordnungen immer zum zehnmal Größern emporsteigt (§. 11. II), und

b) daß die Ziffern neben dem Werthe der Figur noch einen Lokalwerth haben (§. 12. 2. b).

* Die Rechnung mit Decimalbrüchen wird jener mit gemeinen Brüchen vielfach vorgezogen. Dieser Vorzug hat seinen Grund darin, daß die Decimalen in Rechnungen wie ganze Zahlen behandelt werden können.

3) Wenn man die eben angeführten Annahmen als Gesetz gelten läßt, und nach diesem Gesetze Zahlen unter die Einheit fortbildet, d. i. wenn man einen Einer zur Rechten Ziffern beisetzt, so haben diese (vermöge der Stelle, welche sie einnehmen) einen zehnfach, hundertfach, tausendfach ... kleinern Werth, als der Einer, welcher ihnen zur Linken steht. Man erhält auf diese Weise (der Einheit zur Rechten) Zehntel, Hundertel, Tausendtel .... (§. 11. 3. I).

4) Weiß man, welche von mehrern bei einander stehenden Ziffern sich auf den Einer (§. 11. 3. I) bezieht, so sind schon die Ordnungen der Ziffern (wie in ganzen Zahlen so auch in Decimalstellen) durch das besprochene Gesetz bestimmt. Daher muß die Einerstelle kenntlich gemacht werden; kenntlich wird sie aber gemacht entweder

a) durch ein Komma (= ,) Einerstrich genannt, oder

b) durch einen Punkt (= .), welcher der an der Einerstelle stehenden Ziffer oben zur Rechten gesetzt wird (angenommen, daß eine Einerstelle ausgedrückt gesetzt ist).

5) Weil in Zahlen Stellen der Einheit zur Rechten schon Zehntel, Hundertel, Tausendtel ... ausdrücken, so ist es nicht nöthig, daß in einem Decimalbruche der Nenner mit angeschrieben werde.

* Das Dezimalzeichen (Einerzeichen (das Komma oder der Punkt)) vertritt die Stelle des Nenners und ist daher wegen der Abkürzung vortheilhaft.

6) Wenn mit dem Decimalbruche kein Ganzes verbunden ist, d. i. wenn die Decimalen keine bedeutende Ziffer zur Linken haben, so setzt man gewöhnlich an die Einerstelle entweder

a) die den Mangel eines andern Zahlzeichen andeutende Nulle, oder

b) den angegebenen Punkt

α) mit der Nulle, oder

β) ohne dieselbe.

* Einige Arithmetiker nennen diejenigen Decimalen, welche kein Ganzes bei sich haben, reine Decimalbrüche. Die mit Ganzen verbundenen Decimalstellen heißen gemischte Decimalbrüche.

Das Gesagte mache folgende Tafel deutlicher.

Stelle der					
Tausendter.	1000	1000	1000	1000	1000
Hunderter.	$\frac{1000}{10}$	100	100	100	100
Zehner.	$\frac{100}{10}$	10	10	10	10
Einer.	$\frac{10}{10}$	1	1	1	1
Zehntel.	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0,1	0·1	·1
Hundertel.	$\frac{1}{10\times10}$	$\frac{1}{100}$	0,01	0·01	·01
Tausendtel.	$\frac{1}{100\times10}$	$\frac{1}{1000}$	0,001	0·001	·001
10 Tausendtel.	$\frac{1}{1000\times10}$	$\frac{1}{10000}$	0,0001	0·0001	·0001
100 Tausendtl.	$\frac{1}{10000\times10}$	$\frac{1}{100000}$	0,00001	0·00001	·00001

* Das Komma dient auch als Eintheilungszeichen (§. 13), darum wird bei Decimalen hier der Punkt gebraucht als Decimal- oder Einer-Zeichen.

§. 71.

Aufgabe.

Decimalen auszusprechen und anzuschreiben.

Auflösung.

I. Will man Decimalen richtig aussprechen, so kann man entweder

a) jede Zifferstelle (aus dem Zähler) einzeln mit ihrem besondern Nenner, oder

b) die ganze Zahl (den ganzen Zähler) mit dem gemeinschaftlichen Nenner auf einmal aussprechen.

Beispiele.

I. 5·732 heißt nach der ersten Aussprechart (nach a):

$$5 \text{ Ganze } + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000};$$

nach der zweiten Aussprechart (nach b):

$$5 \text{ Ganze } + \frac{732}{1000} = 5\frac{732}{1000}.$$

II. 0·6437 heißt nach a:

$$\text{Kein Ganzes } \frac{6}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{7}{10000};$$

nach b.

$$\text{Kein Ganzes } \frac{6437}{10000} = \frac{6437}{10000}.$$

III. 0·005389 heißt nach a:

$$0 \text{ Ganze, } \frac{0}{10}, \frac{0}{100}, \frac{5}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{8}{100000} + \frac{9}{1000000};$$

nach b:

$$0 \text{ Ganze } \frac{5389}{1000000} = \frac{5389}{1000000}.$$

Der gemeinschaftliche Nenner ist immer die Einheit (= 1) mit so viel Nullen, als der Decimalbruch Decimalstellen hat.

Nachweis.

$$\text{I. } \frac{6}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{7}{10000} = \frac{6000+400+30+7}{10000};$$

$$\frac{6437}{10000} = 0{\cdot}6437.$$

Vier Stellen hat der Decimalbruch, eben so viele Nullen hat der gemeinschaftliche Nenner (10000).

$$\text{II. } \frac{5}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{8}{100000}+\frac{9}{1000000}=\frac{5000+300+80+9}{1000000};$$

$$=\frac{5389}{1000000}=0{\cdot}005389.$$

Sechs Stellen hat der Decimalbruch, eben so viel Nullen hat der gemeinschaftliche Nenner (1000000).

$$\text{III. } \frac{7}{10}+\frac{9}{100}+\frac{4}{10000}+\frac{3}{100000}=$$

$$\frac{70000+9000+40+3}{400000}=\frac{79043}{100000}=0{\cdot}79043.$$

II. Die Decimalbrüche können **angeschrieben** werden, entweder

a) wie gemeine Brüche, so daß ihnen der Nenner beigegeben wird, oder

b) als eigentliche Decimalbrüche, in welchen dann der Nenner zum Zähler nicht angeschrieben werden muß (§. 70. 5).

a.

Wenn Decimalbrüche wie gemeine Brüche angeschrieben werden, so wird nur die Regel befolgt, welche (§. 41. I) für gemeine Brüche gegeben ist.

b.

Werden sie als eigentliche Decimalbrüche angeschrieben, so hat man,

α) wenn sie nach der ersten Sprechart dictirt oder ausgesprochen wurden, die Abwesenheit einer Zahlziffer in einer Stelle, welche zwischen die gegebenen hineinfällt, durch Nullen zu ergänzen;

β) wenn sie nach der zweiten Sprechart dictirt oder ausgesprochen wurden, so muß der Decimalbruch eben so viele Zifferstellen bekommen, als der ihm zugehörige Nenner Nullen hat.

Wenn der Zähler nicht so viele Zifferstellen hat, als der Nenner Nullen erhielte, wenn er angeschrieben würde, so werden die fehlenden Stellen durch Nullen (**Ergänzungsnullen**) ersetzt. Diese Ergänzungsnullen sind unmittelbar nach dem Einerzeichen zu setzen.

Beispiele.

I. Man schreibe $\frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{10000}$ als einen eigentlichen Decimalbruch an.

Auflösung.

$$\frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{10000} = \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{2}{10000};$$

Diese Brüche auf gleiche Benennung gebracht:

$$\frac{7000 + 300 + 2}{10000} = \frac{7302}{10000};$$

der Nenner kann wegbleiben, also:

$$= 0\cdot7302.$$

II. Man schreibe $\frac{5}{100} + \frac{3}{10000}$ als einen eigentlichen Decimalbruch an.

Auflösung.

$$\frac{5}{100} + \frac{3}{10000} = \frac{0}{10} + \frac{5}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{3}{10000};$$

$$\frac{500 + 3}{10000} = \frac{503}{10000} = 0\cdot0503.$$

III. Es soll $7\frac{643}{100000}$ als eigentlicher Decimalbruch angeschrieben werden.

Auflösung.

$$7\frac{643}{100000} = 7 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{3}{100000};$$

$$7 + \frac{00643}{100000} = 7 + 0\cdot00643 = 7\cdot00643.$$

IV. Es soll $\frac{931}{1000000}$ als eigentlicher Decimalbruch angeschrieben werden.

Auflösung.

$$\frac{931}{1000000} = \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{1}{1000000};$$

$$\frac{0000931}{1000000} = 0\cdot000931.$$

V. Man schreibe $6\frac{7}{10000}$ als eigentl. Decimalbruch an.

$$6 + \frac{7}{10000} = 6 + \frac{0007}{10000} = 6{\cdot}0007.$$

VI. Man schreibe folgende Brüche als Decimalbrüche an.

$$2\frac{401}{1000090};\ \frac{76}{1000};\ \frac{13}{100000};\ \frac{51}{10000000};\ 79\frac{11}{1000000}.$$

Auflösung zur Uebung.

§. 72.

S ä tz e.

1) Aus dem bisher gesagten ist ersichtlich,

a) daß Nullen vor Decimalen, d. i. zwischen der Einerstelle und einer bedeutenden Decimale den Werth der Decimalen ändern (§. 70); z. B.

$$0{\cdot}35 > 0{\cdot}035 \text{ und}$$
$$0{\cdot}009 < 0{\cdot}09;$$

b) daß aber Nullen nach Decimalen den Werth dieser so wenig ändern, als wie vor Ganzen. Wie z. B.

$$36 = 000\ldots36,$$

so ist auch

$$0{\cdot}7 = 0.7000\ldots;$$

denn

$$0{\cdot}7 = \frac{7}{10} \text{ und}$$

$$0{\cdot}7000\ldots = \frac{7000\ldots}{10000\ldots},$$

theilt man nun im Bruche $\frac{7000\ldots}{10000\ldots}$ (nach §. 42. 3) Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl (durch 1000...), so erhält man $\frac{7}{10} = \frac{7000\ldots}{10000\ldots}$; also ist

$$0{\cdot}7 = 0{\cdot}7000\ldots;$$

somit ändern Nullen nach Decimalen den Werth dieser nicht.

F o l g e s ä tz e.

Man kann, wenn es die Rechnung erheischt,

α) Decimalbrüchen willkührlich Nullen anhängen, und eben so Nullen den Ganzen in Form von Decimalen ansetzen, oder

β) ihnen angehängte Nullen weglassen, ohne ihren Werth zu verändern; d. i.

α.

$$0{\cdot}375 = 0{\cdot}375000; \text{ und}$$
$$12 = 12{\cdot}00000; \text{ oder}$$

β.

$$0{\cdot}438000 = 0{\cdot}438; \text{ und}$$
$$33{\cdot}000 = 33.$$

2) Da (§. 70 und §. 11) jede Ziffer, wenn sie in Hinsicht auf die Einerstelle von der Linken zur Rechten um 1; 2; 3... Stellen zurückgerückt wird, um das 10; 100; 1000... fache abnimmt, und im Gegentheile um das eben so Vielfache zunimmt, wenn sie von der Rechten zur Linken um 1; 2; 3;... Stellen vorwärts gerückt wird, so wird ein Decimalbruch durch 10; 100; 1000...

a) multiplicirt, wenn das Einerzeichen um 1; 2; 3... Stellen von der Linken zur Rechten zurückgerückt wird (§. 19. 5),

b) dividirt, wenn man das Einerzeichen um 1; 2; 3... Stellen von der Rechten zur Linken vorwärts rückt (§. 21. 5.)

* Wenn im Multiplicand die gegebenen Ziffern nicht ausreichen sollten, so muß man die fehlenden durch Nullen ergänzen.

** Wenn im Dividende keine Ganze oder nicht so viele Ganze sind, daß man obiger Regel (b.) nachkommen könnte, so darf man nur Nullen an die Stellen der Ganzen setzen und diese Nullen gleich Ganzen von der Rechten zur Linken rücken. — Nullen vor Ganzen ändern den Werth dieser nicht; sie dürfen also ihnen vorgesetzt werden, wenn dieses die Rechnung erheischt. —

Beispiele.

a.

I. Man vermehre 37·593 mit 10.

Auflösung.

$$37{\cdot}593 \times 10 = x;$$
$$375{\cdot}93 = x.$$

II. 4·6387 werde mit 100 vermehrt.

Auflösung.

$$4{\cdot}6387 \times 100 = x;$$
$$463{\cdot}87 = x.$$

III. Man multiplicire 0·732951 mit 10000.

Auflösung.

$0{\cdot}732951 \times 10000 = x;$

$7329{\cdot}51 = x.$

IV. Es soll 37·91 mit 1000 vermehrt werden.

Auflösung.

$37{\cdot}91 \times 1000 = x)$

$37{\cdot}910 \times 1000 = x;$

$37910 = x.$

V. 4·731 soll mit 100000 vermehrt werden.

Auflösung.

$4{\cdot}731 \times 100000 = x;$

$4{\cdot}73100 \times 100000 = x;$

$473100 = x.$

b.

I. Es werde 543·72 durch 10 getheilt.

Auflösung.

$543{\cdot}72 : 10 = x;$

$54{\cdot}372 = x.$

II. Man theile 17·329 durch 100.

Auflösung.

$17{\cdot}329 : 100 = x;$

$0{\cdot}17329 = x.$

III. Durch 1000 soll 8352·631 getheilt werden.

Auflösung.

$8352{\cdot}631 : 1000 = x;$

$8{\cdot}352631 = x.$

IV. Man theile 543·72 durch 100000.

$543{\cdot}72 : 100000 = x;$

$00543{\cdot}72 : 100000 = 0{\cdot}0054372 = x.$

V. Es soll 0·321 durch 100000 dividirt werden.

$0{\cdot}321 : 100000 = x;$

$000000{\cdot}321 : 1000000 = 0{\cdot}00000321 = x.$

Beweis.

$$0{\cdot}321 : 100000 = \frac{321}{1000} : 100000;$$

$$\frac{321}{1000} \times \frac{1}{100000} = \frac{321}{1000 \times 00000} = \frac{021}{100000000};$$

$$= 0{\cdot}00000321.$$

§. 73.

Aufgabe.

Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung.

1) Man erweitere (§. 44) den gemeinen Bruch, welchen man zu einem Decimalbruch machen will, durch ein Vielfaches von Zehn, welches so viele Nullen hat, wie viele Stellen man im Decimalbruche bestimmen will.

2) Den erweiterten Bruch vereinfache man (§. 44. II) durch den Nenner des vorigen einfachen Bruches. Hiedurch erhält man einen Bruch, welcher jenes Vielfache von Zehn zum Nenner hat, mit welchem man vorhin den gemeinen Bruch erweiterte.

3) Den so vereinfachten Bruch schreibe man als eigentlichen Decimalbruch an.

Erklärungen.

1) Nur solche erweiterte Brüche, deren Nenner 2; 5; oder ein Produkt von jeder dieser beiden Zahlen, entweder mit sich selbst (z. B. 2.2; 2.2.2; 5.5; 5.5.5 u. s. w.), oder mit der andern (z. B. 2.5; 2.2.5; 2.5.2.5 u. s. w.) ist, können vollkommen vereinfacht werden, weil nur solche Nenner in dem erweiterten Zähler ohne Rest enthalten sein können. Die aus diesen Brüchen hervorgehenden Decimalbrüche heißen endliche.

2) Diejenigen Decimalbrüche, die aus allen andern Brüchen hervorgehen, heißen unendliche, weil ihr Nenner nie in der Erweiterungsgröße aufgeht. Die unendlichen Decimalbrüche heißen auch periodische, weil nach einer bestimmten Anzahl von Ziffern immer dieselben wiederkehrend sind. — Ein periodischer Decimalbruch kann

a) gleich mit der Periode, d. i. mit den immer wiederkehrenden Ziffern beginnen, oder

b) es können der Periode andere Ziffern vorangehen.

* Die endlichen Decimalbrüche sind den gemeinen, aus denen sie entsprungen, ganz gleich, nicht aber die unendlichen.

Beispiele.

1.

Gemeine Brüche, aus welchen unendliche Decimalbrüche entspringen können, in Decimalbrüche zu verwandeln.

I. Der gemeine Bruch $\frac{3}{4}$ soll in einen Decimalbruch verwandelt werden.

Auflösung.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 . 100}{4 . 100};$$

$$\frac{300}{400} = \frac{300 : 4}{400 : 4};$$

$$\frac{75}{100} = 0{\cdot}75.$$

II. Der gemeine Bruch $\frac{13}{16}$ soll ein Decimalbruch werden.

Auflösung.

$$\frac{13}{16} = \frac{13 . 10000}{16 . 10000};$$

$$\frac{130000}{160000} = \frac{130000 : 16}{160000 : 16};$$

$$\frac{8125}{10000} = 0{\cdot}8125.$$

III. $\frac{21}{25}$ soll ein Decimalbruch werden.

Auflösung.

$$\frac{21}{25} = \frac{21 . 100}{25 . 100};$$

$$\frac{2100}{2500} = \frac{2100 : 25}{2500 : 25};$$

$$\frac{84}{100} = 0{\cdot}84.$$

IV. $\frac{576}{625}$ werde in einen Decimalbruch verwandelt.

Auflösung.

$$\frac{576}{625} = \frac{576 \times 10000}{625 \times 10000};$$

$$\frac{5760000}{6250000} = \frac{5760000 : 625}{6250000 : 625};$$

$$\frac{9216}{10000} = 0·9216.$$

V. Man mache zu Decimalbrüchen:

$$\frac{7}{8};\ \frac{4}{5};\ \frac{122}{125};\ \frac{53}{64}.$$

2.

Gemeine Brüche, aus welchen nur unendliche oder periodische Decimalen entspringen können, in Decimalbrüche zu verwandeln.

I. Der gemeine Bruch $\frac{2}{3}$ soll ein Decimalbruch werden.

Auflösung.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 . 10000 \ldots}{3 . 10000 \ldots};$$

$$\frac{20000}{30000} = \frac{20000 : 3}{10000};$$

$$\frac{666 + \frac{2}{3}}{1000} = 0·6666 \ldots$$

II. Es soll $\frac{4}{7}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden.

Auflösung.

$$\frac{4}{7} = \frac{4 . 1000000}{7 . 1000000};$$

$$\frac{4000000}{7000000} = \frac{4000000 : 7}{1000000};$$

$$\frac{571428 + \frac{4}{7}}{1000000} = 0·571428 \ldots .$$

III. $\frac{5}{12}$ werde in einem Decimalbruch ausgedrückt.

Auflösung.

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \times 10000}{12 \times 10000};$$

$$\frac{500000}{1200000} = \frac{500000 : 12}{100000};$$

$$\frac{41666 + 8}{100000} = 0·41666 \ldots .$$

IV. Es sollen Decimalbrüche werden:

$$\frac{5}{9},\quad \frac{9}{11},\quad \frac{14}{15},\quad \frac{19}{22},\quad \frac{37}{42}.$$

§. 74.

Aufgabe.

Einen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Auflösung.

Soll ein Decimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelt werden, so sehe man,

1) ob der Decimalbruch ein endlicher, oder
2) ob er ein unendlicher sey (§. 73).

1.

Endliche Decimalbrüche werden dadurch in gemeine Brüche verwandelt, daß man ihnen ihren gehörigen Nenner gibt, und sie so sehr als möglich vereinfacht.

Beispiele.

I. Es soll 0·875 ein gemeiner Bruch werden.

Auflösung.

$$0{\cdot}875 = \frac{875}{1000};$$

$$\frac{875 : 125}{1000 : 125} = \frac{7}{8}.$$

II. Es werde 0·84 in einen gemeinen Bruch verwandelt.

Auflösung.

$$0{\cdot}84 = \frac{84}{100};$$

$$\frac{84 : 4}{100 : 4} = \frac{21}{25}.$$

III. Man verwandle 0·8125 in einen gemeinen Bruch.

Auflösung zur Uebung.

2.

Bei unendlichen Decimalbrüchen hat man darauf zu sehen,

a) ob sie gleich mit der Periode beginnen, oder
b) ob der Periode noch andere Ziffern vorangehen (§. 73).

a.

Wenn der Decimalbruch gleich mit der Periode beginnt, so ist er einem gemeinen Bruche gleich, der eine Periode zum Zähler und so viele Neuner (99....) zum Nenner hat, als in der Periode Ziffern stehen.

In einen gemeinen Bruch wird ein solcher Bruch wirklich verwandelt, wenn man dem gehörigen Zähler die richtige Anzahl Neuner als Nenner gibt, und diesen Bruch möglichst vereinfacht.

* Die den nächstnachfolgenden Beispielen (für a und b) beigesetzten Beweise basiren sich in den bisher Erörterten vorzüglich auf (§. 20. §. 42.) unter den folgenden §§. verständiget sie noch besonders §. 76.

Beispiele.

I. Es soll 0·555... in einen gemeinen Bruch verwandelt werden.

Auflösung.

$$0·555... = \frac{5}{9}.$$

Beweis.

$$0·555... = \frac{9 \times 0·555...}{9}; \text{ §. 42. 3.}$$

$$\frac{(10-1) \times 0·555...}{9} = \frac{5·555... - 0·555...}{9}; \text{ §. 20. III. 5.}$$

$$\frac{5 + 0·555... - 0·555...}{9} = \frac{5 + (0·555... - 0·555...)}{9};$$

$$\frac{5+0}{9} = \frac{5}{9}; \text{ also}$$

$$0·555... = \frac{5}{9}.$$

II. Man verwandle 0·818181... in einen gemeinen Bruch.

Auflösung.

$$0·818181... = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}.$$

Beweis.

$$0·818181... = \frac{99 \times 0·818181...}{99} = \frac{(100-1).0·818181...}{99};$$

$$= \frac{100.0·818181... - 0·818181...}{99};$$

$$= \frac{81{\cdot}818181\ldots - 0{\cdot}818181\ldots}{99};$$

$$= \frac{81}{99} = \frac{9}{11}.$$

III. Es werde der Bruch 0·407407 in einen gemeinen Bruch verwandelt.

Auflösung.

$$0{\cdot}407407\ldots = \frac{407}{999} = \frac{11\,.\,37}{111\,.\,9};$$

$$= \frac{11\,.\,37}{3\,.\,37\,.\,9} = \frac{11}{27}.$$

Beweis.

$$0{\cdot}407407\ldots = \frac{999 \times 0{\cdot}407407\ldots}{99};$$

$$= \frac{(1000 - 1)\,.\,0{\cdot}407407\ldots}{999};$$

$$= \frac{407{\cdot}407407\ldots - 0{\cdot}407407\ldots}{999};$$

$$\frac{407}{999} = \frac{11\,.\,37}{27\,.\,37};$$

$$= \frac{11}{27}.$$

b.

Wenn der Periode noch andere Ziffern vorangehen, so wird der Decimalbruch in zwei Brüche aufgelöst. Der erste von diesen ist ein endlicher, dessen Zähler die nicht zur Periode gehörigen Ziffern und dessen Nenner 10; 100; 1000... ausmachen; der zweite dieser Brüche ist ein unendlicher, und gleicht einem gemeinen Bruche, welcher eine Periode zum Zähler und zum Nenner so viele Neuner, als in der Periode Ziffern sind, sammt so viel Nullen hat, als der Periode andere Decimalen vorangehen.

Zum gemeinen Bruch wird ein solcher Decimalbruch gemacht, indem man die beiden gemeinen Brüche auf gleiche Benennung bringt, addirt und möglichst vereinfacht.

Beispiele.

I. Man vewandle 0·9333... in einen gemeinen Bruch.

Auflösung.

$$0{\cdot}9333\ldots = \frac{9}{10} + \frac{3}{90} = \frac{81+3}{90};$$
$$= \frac{84}{90} = \frac{14}{15}.$$

Beweis.

$$0{\cdot}9333\ldots = \frac{10 \times 0{\cdot}9333\ldots}{10};$$

$$\frac{9{\cdot}333\ldots}{10} = \frac{9}{10} + \frac{0{\cdot}333\ldots}{10};$$

$$\frac{9}{10} + \frac{\left(\frac{3}{9}\right)}{10} = \frac{9}{10} + \left(\frac{3}{9} : 10\right);$$

$$\frac{9}{10} + \frac{3}{90} = \frac{81+3}{90};$$
$$\frac{84}{90} = \frac{14}{15}.$$

II. Es soll 0·41666 ... in einen gemeinen Bruch verwandelt werden.

Auflösung.

$$0{\cdot}41666\ldots = \frac{41}{100} + \frac{6}{900} = \frac{41 . 9 + 6}{900};$$

$$\frac{369+6}{900} = \frac{375}{900} = \frac{5}{12}.$$

Beweis.

$$0{\cdot}41666\ldots = \frac{100 \times 0{\cdot}41666\ldots}{100};$$

$$\frac{41{\cdot}666\ldots}{100} = \frac{41}{100} + \frac{0{\cdot}666\ldots}{100};$$

$$\frac{41}{100} + \frac{\left(\frac{6}{9}\right)}{100} = \frac{41}{100} + \left(\frac{6}{9} : 100\right);$$

$$\frac{41}{100} + \frac{6}{900} = \frac{369+6}{900};$$
$$\frac{375}{906} = \frac{5}{12}.$$

III. Es sollen in gemeine Brüche verwandelt werden:

$$0{\cdot}8666\ldots = \frac{13}{15};$$

$$0{\cdot}708333\ldots = \frac{17}{24};$$

$$0{\cdot}9142857142857\ldots = \frac{32}{35}.$$

BB. Die Grundrechnungsarten mit unbenannten Decimalbrüchen.

§. 75.

Addition.

Aufgabe.

Decimalbrüche zu addiren.

Auflösung.

Man schreibe die zu addirenden Größen so unter einander, daß sowohl bei den Ganzen, als bei den Decimalen die gleichartigen Zifferstellen unter sich zu stehen kommen (dieß geschieht, wenn man die Einerzeichen der Decimalen in senkrechter Linie unter einander setzt), und verfahre dann ganz wie bei der Addition der ganzen Zahlen (§. 14 und §. 16).

Beispiele.

I. Es sollen folgende Decimalbrüche: 7·321 + 0·30769 + 30·005731 + 371·41 addirt werden.

Auflösung.

```
  7·321
  0·30769
 30·005731
371·410000
──────────
409·044421.
```

II. Man addire: 352·7201 + 3·27 + 0·0000351 + 364·71 + 0·92357.

Auflösung.

```
352·7201
  3·2700
  0·0000351
364·7100000
  0·9235700
───────────
721·6237051.
```

III. Man addire: 3·007 + 93·40025 + 0·6793401 + 0·00834 + 135·792684.

Auflösung.

3·007
93·40025
0·6793401
0·0083400
135·7926840

232·8876141.

§. 76.

Subtraction.

Aufgabe.

Decimalbrüche von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

Man schreibe den Subtrahend so unter den Minuend, daß die gleichartigen Zifferstellen lothrecht unter einander zu stehen kommen, und hänge, wenn sie eine ungleiche Anzahl von Zifferstellen haben, derjenigen Größe, die weniger hat, so viele Nullen an, als sie weniger Stellen hat. Dann verrichte man die Subtraction wie bei ganzen Zahlen (§. 15 und §. 16).

* Wenn mehrere positive und negative Größen gegeben sind, welche nur in einer ausgedrückt werden sollen, so kann man die positiven und die negativen besonders addiren und die Summe der letzteren von der der ersteren abziehen.

Beispiele.

I. Von 76 4321 sollen 35'97861 abgezogen werden.

Auflösung.

76·43210
— 35·97861

40·45349; oder

76·4310 — 35·97861 = 40·45349.

II. Von 3·01024 soll 2·7413261 abgezogen werden.

Auflösung.

3·0102400
— 2·7413261

0·2689139; oder

3·0102400 — 2 7413261 = 0·2689139.

III. Es sollen 0·9764381 von 1 abgezogen werden.

Auflösung.

$$\begin{array}{r} 1{\cdot}0000000 \\ -\ 0{\cdot}9764381 \\ \hline 0{\cdot}0235619. \end{array}$$

IV. Es werde 45·37985 von 28·196743 abgezogen.

Auflösung.

28·196743 — 45·379850 — 17·183107.

V. Es sollen in einer Größe gegeben werden:

0·347 — 6·321 + 23·59 — 0·381 — 7·473 + 0·3.

Auflösung.

0·347 — 6·321 + 23·59 — 0·381 — 7·473 + 0·3 = x;
0·347 + 23·59 + 0·3 — 6·321 — 0·381 — 7·473 = x;
(0·347 + 23·59 + 0·3) — (6·321 + 0·381 + 7·473) = x;
24·237 — 14·175 = 10·062 = x.

Zur Uebung summire man:

VI. 7·3259 — 17·0043 — 0·387 + 72·46083 — 16·031 — 3·54978 + 63·4587 — 0·3579 — 28·400713 = x.

VII. 14·579 — 13·957 — 0·325 + 16·85301 — 12·0043167 + 0·32597 — 0·6458079 + 132·03 — 18·7000431 = x.

VIII. — 52·643 — 0·873 + 72·03 — 6·4007 + 10·370021 — 4·37 + 0·6321457 — 3·98463 = x.

IX. 37·351 — 27·241 + 0·649 — 3·759 — 4·32576 + 7.904 — 1·67424 + 3·096 — (1·325798 — 18·4763 + 0·674202 — 5·5237) = x.

X. (42·357169 — 19·72503 + 22·876543 — 0·4321 + 17·123457 — 20.27497 + 8·642831 — 1·5679) — (12·57931 — 27·64329 + 18·7253 — 34·84901 + 3·2947 — 6·15099 — 5·34671 + 7·42069) = x.

XI. 13·573021 — 17·397642 — 6·135709 + 8·4732 — 12·864291 + 14·5268 + 0·426979 — 15·603258 — (0·35791 — 24·168073 — 13·58047 + 11·72593 — 5·831927 + 7·64209 — 9·41953 + 0·27407) = x.

§. 77.

Multiplication.

Aufgabe.

Einen Decimalbruch zu multipliciren

1) mit einer ganzen Zahl,

2) mit einem gemeinen Bruche,

3) mit einem andern Decimalbruche.

Auflösung.

1) Man multiplicire (wenn man einen Decimalbruch mit einer ganzen Zahl multipliciren will) den Decimalbruch wie eine ganze Zahl, ohne Rücksicht auf das Einerzeichen mit der ganzen Zahl und schneide von dem erhaltenen Produkte so viele Stellen als Decimalen ab, als der Decimalbruch vor der Multiplication hatte.

Wenn das erhaltene Produkt nicht so viele Zifferstellen enthält, als abzuschneiden sind, so ersetze man die abgehenden durch vorangesetzte Nullen.

Beispiele.

I. Es soll 0·485 mit 12 multiplicirt werden.

Auflösung.

$$0{\cdot}485 \times 12 = x;$$
$$485 \times 12 = 5820;$$
$$5{\cdot}820 = x.$$

Beweis.

$$0{\cdot}485 \times 12 = \frac{485}{1000} \times 12;$$
$$\frac{5820}{1000} = 5{\cdot}820 = 5{\cdot}82.$$

II. Es soll 0·0372 mit 31 multiplicirt werden.

Auflösung.

$$0{\cdot}0372 \times 31 = x;$$
$$372 \times 31 = 11532;$$
$$1{\cdot}1532 = x.$$

III. Man multiplicire 0·000579 mit 871.

Auflösung.

$$0{\cdot}000579 \times 871 = x;$$
$$579 \times 871 = 504309;$$
$$0{\cdot}504309 = x.$$

IV. Es soll 0·0073 mit 13 multiplicirt werden.

Auflösung.

$$0{\cdot}0073 \times 13 = x;$$
$$73 \times 13 = 949;$$

Vier Zifferstellen sind abzuschneiden, also

$$0{\cdot}0949 = x.$$

Beweis.

$$0{\cdot}0073 \times 13 = \frac{73 \times 13}{10000};$$

$$\frac{949}{10000} = 0{\cdot}0949.$$

V. Man multiplicire 0·0000543 mit 217.

Auflösung.

$$0{\cdot}0000543 \times 217 = x;$$

$$543 \times 217 = 117831;$$

$$0{\cdot}0117831 = x.$$

2) Wenn ein Decimalbruch mit einem gemeinen Bruche multiplicirt werden soll, so gibt man dem Decimalbruch seinen Nenner, d. i. man macht ihn zum gemeinen Bruch, multiplicirt den Zähler des Decimalbruches mit dem Zähler des gemeinen Bruches (ist der gemeine Bruch eine gemischte Zahl, so muß er vorerst in einen unächten Bruch aufgelöst werden), und den Nenner des Decimalbruches mit dem Nenner des gemeinen Bruches, vereinfacht den erhaltenen neuen Bruch (§. 44. 3) mit dem Nenner des gemeinen Bruches und schreibt den vereinfachten Bruch als eigentlichen Decimalbruch an.

Beispiele.

I. Es soll 0·875 mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden.

Auflösung.

$$0{\cdot}875 \times \frac{3}{4} = x;$$

$$\frac{875}{1000} \times \frac{3}{4} = \frac{2625}{4000};$$

$$\frac{2625 : 4}{1000} = \frac{656 + \frac{1}{4}}{1000};$$

$$0{\cdot}65625 = x.$$

II. Man multiplicire 0·00325 mit $\frac{12}{13}$.

Auflösung.

$$0{\cdot}00325 \times \frac{12}{13} = x;$$

$$\frac{325}{100000} \times \frac{12}{13} = \frac{25 \, . \, \cancel{13} \times 12}{100000 \times \cancel{13}},$$

$$\frac{25 \times 12}{100000} = \frac{300}{100000} = 0{\cdot}00300;$$

$$0{\cdot}003 = x.$$

III. Man multiplicire 0·000243 mit $37\frac{1}{27}$.

Auflösung.

$$0{\cdot}000243 \times 37\frac{1}{27} = x;$$

$$\frac{243}{1000000} \times \frac{1000}{27} = \frac{9 \,.\, \cancel{27} \times \cancel{1000}}{1000 \,.\, \cancel{1000} \times \cancel{27}};$$

$$0{\cdot}009 = x.$$

IV. Man multiplicire 0·000375 mit $17\frac{3}{5}$.

Auflösung.

$$0{\cdot}000375 \times 17\frac{3}{5} = x;$$

$$\frac{375}{1000000} \times \frac{88}{5} = \frac{75 \,.\, \cancel{5} \times 8 \,.\, 11}{1000000 \times \cancel{5}};$$

$$\frac{600 \,.\, 11}{1000000} = \frac{66\cancel{00}}{10000\cancel{00}};$$

$$0{\cdot}0066 = x.$$

3) Um einen Decimalbruch mit einem andern Decimalbruch zu multipliciren, gebe man beiden (dem Multiplicator und Multiplicand) ihre Nenner, multiplicire die beiden Zähler und die beiden Nenner und schreibe das Produkt der Zähler als einen eigentlichen Decimalbruch an, der so viele Stellen haben muß, als das Produkt aus beiden Nennern Nullen hat.

Beispiele.

I. Man multiplicire 0·48 mit 0·432.

Auflösung.

$$0{\cdot}48 \times 0{\cdot}432 = x;$$

$$\frac{48}{100} \times \frac{432}{1000} = \frac{20736}{100000};$$

$$0{\cdot}20736 = x.$$

II. Es soll 0·583 mit 4·12 multiplicirt werden.

$$0{\cdot}583 \times 4{\cdot}12 = x;$$

$$\frac{583 \times 412}{1000 \times 100} = \frac{240196}{100000};$$

$$2{\cdot}40196 = x.$$

III. Man multiplicire 17·45 mit 0·32.

Auflösung.

$$17·45 \times 0·32 = x;$$

$$\frac{1745}{100} \times \frac{32}{100} = \frac{55840}{10000};$$

$$5·5840 = 5·584 = x.$$

IV. Es soll 0·007 mit 0·0163 multiplicirt werden.

Auflösung.

$$0·007 \times 0·0163 = x;$$

$$\frac{7}{1000} \times \frac{163}{10000} = \frac{1141}{10000000};$$

$$0·0001141 = x.$$

Zur Uebung multiplicire man:

V. 0·376421 mit 5·321467 = x.
VI. 8·764523 mit 0·00973 = x.
VII. 153·00429 mit 0·000781 = x.
VIII. 0·74329 mit 0·68321 = x.
IX. 0·435 × 0·0032 × 0·00057 = x.
X. 0·463 × 325·79 × 0·732 × 0·594.

§. 78.

Division.

Aufgabe.

Einen Decimalbruch zu dividiren

1) durch eine ganze Zahl,
2) durch einen gemeinen Bruch,
3) durch einen andern Decimalbruch.

Auflösung.

1) Man verwandle die ganze Zahl, wenn durch sie ein Decimalbruch dividirt werden soll, in einen uneigentlichen Bruch. Diesen Bruch (Divisorbruch) stürze man (§. 61) und multiplicire dann mit dem gestürzten Bruche den Decimalbruch (nach §. 77. 2).

Beispiele.

I. Man dividire 0·7864 durch 8.

Auflösung.

$$0{\cdot}7864 : 8 = x;$$

$$0{\cdot}7864 : \frac{8}{1} = \frac{7864}{10000} \times \frac{1}{8};$$

$$\frac{958 . 8 \times 1}{10000 \times 8} = \frac{958}{10000};$$

$$0{\cdot}0958 = x.$$

II. Man theile 0·001029 durch 98.

Auflösung.

$$0{\cdot}001029 : 98 = x;$$

$$0{\cdot}001029 : \frac{98}{1} = x;$$

$$\frac{21 . 49 \times 1.}{1000000 \times 49 . 2} = \frac{21 : 2}{1000000};$$

$$\frac{10 + \frac{1}{2}}{1000000} = \frac{10 + 0{\cdot}5}{1000000};$$

$$\frac{10{\cdot}5}{1000000} = \frac{105}{10000000};$$

$$0{\cdot}0000105 = x.$$

III. Man theile 0·05719 durch 43.

Auflösung.

$$0{\cdot}05719 : 43 = x;$$

$$\frac{5719}{100000} : \frac{43}{1} = \frac{5719}{100000} \times \frac{1}{43};$$

$$\frac{133 . 43 \times 1}{100000 \times 43} = 0{\cdot}00133 = x.$$

2) Man dividirt einen Decimalbruch durch einen gemeinen Bruch, wenn man diesen stürzt und mit dem gestürzten gemeinen Bruche den Decimalbruch multiplicirt (nach §. 77. 2).

Beispiele.

I. Man dividire 0·1728 durch $\frac{12}{23}$.

Auflösung.

$$0{\cdot}1728 : \frac{12}{23} = x;$$

$$\frac{1728}{10000} \times \frac{23}{12} = \frac{144 . 12 \times 23}{10000 \times 12};$$

$$\frac{144 \times 23}{10000} = \frac{3312}{10000};$$

$$0{\cdot}3312 = x.$$

II. Man dividire 0·01512 durch $4\frac{4}{5}$.

Auflösung.

$$0{\cdot}01512 : 4\frac{4}{5} = x;$$

$$0{\cdot}01512 : \frac{24}{5} = \frac{1512}{100000} \times \frac{5}{24};$$

$$\frac{63 \,.\, \cancel{24} \times 5}{100000 \times \cancel{24}} = \frac{315}{100000};$$

$$0{\cdot}00315 = x.$$

III. Es soll 0·001372 durch $18\frac{3}{8}$ dividirt werden.

Auflösung.

$$0{\cdot}001372 : 18\frac{3}{8} = x;$$

$$\frac{1372}{1000000} : \frac{147}{8} = \frac{343 \,.\, 4 \times 8}{1000000 \times 49 \,.\, 3};$$

$$\frac{7 \,.\, \cancel{49} \,.\, 4 \times 8}{1000000 \times \cancel{49} \,.\, 3} = \frac{28 \,.\, 8}{1000000 \times 3};$$

$$\frac{224 : 3}{1000000} = \frac{74 + \frac{2}{3}}{1000000};$$

$$\frac{74}{1000000} + \frac{(\frac{2}{3})}{1000000} = \frac{74 + 0{\cdot}666\ldots}{1000000};$$

$$0{\cdot}000074666\ldots = x.$$

3) Man gibt, wenn man einen Decimalbruch durch einen andern Decimalbruch dividiren will, beiden Zählern ihre Nenner, stürzt den Divisorbruch und multiplicirt. Den dadurch erhaltenen möglichst vereinfachten gemeinen Bruch verwandelt man in einen Decimalbruch (§. 73).

Beispiele.

I. Man dividire durch 0·12 den Bruch 0·01728.

Auflösung.

$$0{\cdot}01728 : 0{\cdot}12 = x;$$

$$\frac{1728}{100000} : \frac{12}{100} = \frac{144 \,.\, \cancel{12} \times \cancel{100}}{1000 \,.\, \cancel{100} \times \cancel{12}};$$

$$0{\cdot}144 = x.$$

II. Es soll durch 0·49 der Bruch 0·000343 dividirt werden.

Auflösung.

$$0·000343 : 0·49 = x;$$

$$\frac{343}{1000000} : \frac{49}{100} = \frac{7}{10000};$$

$$0·0007 = x.$$

III. Es soll 0·1444 durch 0·0076 dividirt werden.

Auflösung.

$$0·1444 : 0·0076 = x;$$

$$\frac{1444}{10000} : \frac{76}{10000} = \frac{361 . \not{4}}{\not{10000}} \times \frac{\not{10000}}{\not{4} . 19} = \frac{361}{19};$$

$$19 = x.$$

IV. Man theile 3·969 durch 0·21.

Auflösung.

$$3·969 : 0·21 = x;$$

$$\frac{3969}{1000} : \frac{210}{1000} = \frac{3969}{210} = \frac{189 . \not{21}}{\not{21} . 10};$$

$$18·9 = x.$$

V. Es soll 51·89 durch 0·36 dividirt werden.

Auflösung.

$$51·89 : 0·36 = x;$$

$$\frac{5189}{100} : \frac{36}{100} = \frac{5189}{36} = 144 + \frac{5}{36};$$

$$144 + \frac{5 \times 10000}{360000} = 144 + \frac{50000 : 36}{10000};$$

$$144 + \frac{12500 : 9}{10000} = 444 + \frac{1388 + \frac{8}{9}}{10000};$$

$$144 + \frac{1388}{10000} + \frac{(\frac{8}{9})}{10000} = 144 + \frac{1388 + 0·88...}{10000};$$

$$144·138888... = x.$$

VI. Man dividire 13·31 durch 0·121.

Auflösung.

$$13·31 : 0·121 = x.$$

$$\frac{13310}{1000} : \frac{121}{1000} = \frac{13310}{121};$$

$$110 = x.$$

VII. Man dividire 57·76 durch 0·019.

Auflösung.

$57{\cdot}76 : 0{\cdot}019 = x;$

$$\frac{57760}{1000} : \frac{19}{1000} = \frac{57760}{19};$$

$3040 = x.$

VIII. Es werde 260·1 durch 0·85 dividirt werden.

Auflösung.

$260{\cdot}1 : 0{\cdot}85 = x;$

$$\frac{2601}{10} : \frac{85}{100} = \frac{2601}{10} \times \frac{100}{85};$$

$$\frac{26010}{85} = \frac{5202}{17};$$

$306 = x.$

IX. Es werde 25·0047 durch 0·21 dividirt.

Auflösung.

$25{\cdot}0047 : 0{\cdot}21 = x;$

$$\frac{250047}{10000} : \frac{21}{100} = \frac{11907 \,.\, 21 \times 100}{10000 \times 21};$$

$$\frac{11907}{100} = 119{\cdot}07 = x.$$

Man theile zur Uebung:

X. 6·14125 durch 28·934.

XI. 5·476 durch 14·8.

XII. 93·584 durch 0·00328.

* * *

Wenn ein Decimalbruch durch einen Decimalbruch getheilt wird, so kann es sein,

a) daß Dividend und Divisor gleich viel Decimalstellen haben,

b) daß der Divisor mehr Decimalstellen hat, als der Dividend, und

c) daß der Dividend mehr Decimalstellen hat, als der Divisor.

a.

Wenn die Decimalen im Dividend und Divisor gleich viele sind, so erhält der Quotus lauter Ganze oder Ganze mit einem gemeinen Bruche; siehe Beispiele III. V.

b.

Wenn der Divisor mehr Decimalstellen hat, als der Dividend, so macht man die Decimalstellen durch dem Dividend angehängte Nullen gleich und hiemit ist dann der vorige Fall wieder eingetreten; siehe Beispiele VI. VII.

c.

Hat der Dividend mehr Decimalstellen, als der Divisor,

α) so schneidet man nur im Quotus so viele Decimalstellen ab, als der Ueberschuß derselben im Dividende über die des Divisors beträgt, oder

β) man gibt dem Divisor durch angehängte Nullen so viele Stellen, als der Dividend hat, und es tritt abermals der erste Fall ein.

Eine ganze Zahl, oder auch ein gemeiner Bruch wird durch einen Decimalbruch dividirt, wenn man letztern zu einem gemeinen Bruch macht, stürzt und mit erstern multiplicirt. Z. B.

I. Es soll 58 durch 0·0145 dividirt werden.

Auflösung.

$$58 : 0{\cdot}0145 = x;$$

$$58 : \frac{145}{10000} = \frac{58 \times 10000}{145};$$

$$\frac{2 . \cancel{29} \times \cancel{5} . 2000}{\cancel{29} \times \cancel{5}} = 4000 = x.$$

II. Man dividire $\frac{8}{9}$ durch 0·00512.

Auflösung.

$$\frac{8}{9} : 0{\cdot}00512 = x;$$

$$\frac{8}{9} \times \frac{100000}{512} = \frac{\cancel{8} \times 100000}{9 \times 64 . \cancel{8}};$$

$$\frac{12500 . \cancel{8}}{9 \times 8 . \cancel{8}} = \frac{3125 . \cancel{4}}{9 \times 2 . \cancel{4}};$$

$$\frac{3125}{18} = 173 + \frac{11}{18};$$

$$173 + 0{\cdot}6111 \ldots = 173{\cdot}6111 \ldots = x.$$

III. Es soll $15\frac{3}{4}$ durch 0·567 dividirt werden.

Auflösung.

$$15\frac{3}{4} : 0{\cdot}567 = x;$$

$$\frac{63}{4} \times \frac{1000}{567} = \frac{9 \cdot 7 \times 4 \cdot 250}{4 \times 9 \cdot 9 \cdot 7};$$

$$\frac{250}{9} = 27 + \frac{7}{9};$$

$$27{\cdot}777 \ldots = x.$$

§. 79.

Abkürzung (§. 24.)

I. der Multiplication und

II. der Division.

I.

Abgekürzte Multiplication.

Oefters ist es hinreichend, besonders bei Decimalbrüchen, das Produkt zweier Zahlen blos bis zu einer bestimmten Stelle genau zu wissen. In diesem Falle kann die Multiplication auf folgende Weise abgekürzt werden:

1) Man multiplicire mit der höchsten Ziffer des Multiplicators (mit dem höchsten Theilmultiplicator) das ganze Multiplicand; dann mit der zweithöchsten das Multiplicand mit Ausnahme der niedrigsten Ziffer, hierauf mit der dritthöchsten Ziffer des Multiplicators das Multiplicand mit Ausnahme der zwei niedrigsten Ziffern u. s. w.

Damit das abgekürzte Produkt in den letzten Ziffern nicht zu sehr vom genauen Produkte differrire, so werden die Zehner des Produktes, welche die letzte hinweggelassene Ziffer des Multiplicands mit einer Ziffer des Multiplicators geben würde, hinzugezählt. Diese hinzu addirten Zehner nennt man Correctur.

2) Die erhaltenen Theilprodukte schreibe man so an, daß ihre niedrigsten Ziffern immer lothrecht unter einander zu stehen kommen.

3) Um den Lokalwerth der einzelnen Ziffer im Totalprodukte zu bestimmen, hat man nur der Summe der Theilprodukte so viele Nullen anzuhängen, als der höchste Partialmultiplicator Nullen haben sollte.

Beispiele.

I. Man multiplicire 0·376421 mit 5·321467 so, daß ihr Produkt bis zur sechsten Decimalstelle bestimmt ist.

Auflösung.

$$0{\cdot}376421 \times 5{\cdot}321467 = x;$$

$$\frac{376421 \times 5321467}{1000000 \times 1000000} = x;$$

Abgekürzte Multiplication.

```
  3521467
   376421
---------
 15964401.(100000)
  3725026
   319287
    21285
     1064
       53
---------
2003111600000
```

$$\frac{2003111600000}{1000000000000} = x;$$

$$2{\cdot}003111 \ldots = x.$$

II. Man multiplicire 8·764523 mit 0·00973 so, daß das Produkt dieser Zahlen mit bis zur siebenten Stelle bestimmt ist.

Auflösung.

$$8{\cdot}764523 \times 0{\cdot}000973 = x;$$

$$\frac{8764523 \times 973}{1000000 \times 100000} = x;$$

Abgekürzte Multiplication.

```
  8764523
      973
---------
 78880707.(100)
  6135166
   262935
---------
8527880800
```

$$\frac{8527880800}{10000000000} = x;$$

$$0{,}0852788 \ldots = x.$$

III. Man multiplicire 0·000357 mit 0·468 so, daß im Produkte dieser Brüche 6 Stellen bestimmt sind.

Auflösung zur Uebung.

II.

Abgekürzte Division.

Nicht selten, besonders bei Decimalbrüchen, ist es bloß nothwendig, einige Stellen der Quotienten zu wissen. Es kann daher auch die Division, wenn man nur einen Näherungswerth erhalten will, abgekürzt werden, und zwar auf folgende Art:

Um die erste Ziffer des Quotus zu finden, dividirt man das Dividend mit dem ganzen Divisor, wie gewöhnlich; um die zweite, dritte, vierte... Ziffer des Quotus zu finden, läßt man aber nach und nach eine, zwei, drei, vier... Zifferstellen vom Divisor zur Rechten weg, und addirt zum Produkte der jedesmaligen niedrigsten Stelle bloß die Correctur, d. i. jene Zehnereinheiten, welche von dem Produkte aus dem Quotus und der hinweggelassenen nächst vorhergehenden niedrigern Zifferstelle hinübergefallen wären.

Beispiele.

I. Es soll 6·14125 durch 28·9347 dividirt werden und zwar so, daß der Quotus näherungsweise angegeben werde.

Auflösung.

6·14125 : 28·9347 = x;

6·14125 : 28·93470 = x;

Abgekürzte Division.

614125 = 0·212248
(2893470)
0
―――――
614125
(289347)
-578694
―――――
35431
-28934
―――――
6497
-5786
―――――
711

711
-578
133
(28)
-115
18
(2)
-17
1

0·212248 . . . = x.

II. Es soll 5·42103 durch 0·76959 dividirt werden.

Auflösung.

5·42103 : 0.76859 = x;

$$\frac{542103}{76859} = x;$$

Abgekürzte Division.

542103 = 7·0532 . . .
(76859)
-538013
4090
(7685)
- 0
4090
(768)
-3842
248
(76)
-230
18
(7)
-15

7·0532 . . . = x.

* Wenn mit einem unendlichen Decimalbruche oder mit mehreren Decimalen zu multipliciren oder zu dividiren wäre, und wenn das Resultat doch nur ein Näherungswerth sein soll, so wird gewöhnlich nur mit einigen Decimalen multiplicirt oder dividirt.

Man sehe aber in einem solchen Falle, ob die folgende Stelle nach der letzten, die von den Decimalen als Multiplicator oder Divisor

noch genommen wird, größer oder kleiner als fünf (= 5) sey; ist sie größer als fünf, so wird die letzte von den genommenen um eine Einheit vermehrt; ist sie kleiner als fünf, oder ist sie gerade fünf, so bleibt die letzte unverändert.

Wenn z. B. 3·141592653589793238462643383279502884197169 39937510582097494459230781640628620899862803482534211706798 214808651328230664709384460955058226136 . . . als Multiplicator oder Divisor gebraucht werden soll, so nimmt man, wenn anders der Näherungswerth genügen will, entweder

3·1415926 oder auch

3·1416 als Multiplicator oder Divisor.

B.

Von den benannten oder angewandten Decimal-Brüchen (§. 34).

AA. Erklärungen, Aufgaben und Sätze.

§. 80.

Vorbemerkungen.

1) Wenn gleich die Rechnungen mit Decimalbrüchen in mancher Hinsicht jenen mit gemeinen Brüchen vorzuziehen wären, so bedient sich doch das gemeine Leben ihrer selten. — Bei uns ist (§§. 27. 28. 29.) neben dem Duodecimalmaaß das geometrische Längen-, Flächen- und Körpermaaß nach dem Decimalsysteme abgetheilt.

* Der Durchmesser unserer neuen Münzen ist (§. 31) durch Angaben nach diesem Systeme bestimmt.

2) Oefters bedient sich der Decimalbrüche die Wissenschaft, besonders

a) in der Geometrie und

b) in der Naturlehre.

a.

In der Geometrie wird (außerdem, daß viele Mathematiker bei ihren Rechnungen die Decimalbrüche den gemeinen Brüchen vorziehen, und daher diese öfters in Decimalen verwandeln . . .) ein gemischter Decimalbruch (= **3·1415926 . . .** §. **79.** * . . .) vorzüglich oft gebraucht. Dieser gemischte Decimalbruch, welcher durch das allgemeine Zeichen „π" bezeichnet wird, bestimmt mit dem Durchmesser (oder auch mit

dem Halbmesser [§. 83]) des Kreises den Kreis und die mit einem Kreise gebildeten Raumgrößen.

* Die Verhältnißgröße zwischen Durchmesser und Umfang des Kreises (π) wurde nach mehrern andern Mathematikern, mit vieler Mühe von Ludolph von Ceulen, aus Hildesheim, Professor in Leiden, berechnet.

b.

Die Naturlehre bedient sich gewöhnlich des Decimalsystemes bei Bestimmung

α) der specifischen Gewichte der Körper,

β) der Geschwindigkeit der sich bewegenden Körper...

* Der Geometrie und der Naturlehre entlehnt dieser Leitfaden einige Angaben, Sätze und Formeln, welche der mündliche Vortrag weitern Erörterungen würdigen wird. Durch sie werden die nachfolgenden Beispiele leicht verstanden und nachgebildet werden.

§. 81.

Resolvirung und Reducirung benannter Decimalbrüche (§§. 33. 64. 65).

I. Resolvirung.

Soll ein benannter Decimalbruch in die enthaltenen niedrigern Einheiten aufgelöst werden, so multiplicire man ihn nur mit der Reductionszahl (§. 33. 3).

Beispiele.

I. Es sollen 0·302402777... Jahre in Monate, Tage, Stunden, Minuten und Secunden aufgelöst werden.

Auflösung.

0·302402777... = x;

0·302402777... × 12 = 3·6288333... Monate;

0·6288333... × 30 = 18·864999... Tage;

0·864999... × 24 = 20·75999... Stunden;

0·75999... × 60 = 45·5999... Minuten;

0.5999... × 60 = 35·999... Secunden, also

0·302402777... Jahre = 3 Monate, 18 Tage, 20 Stunden, 45′ und 36″.

II. Es sollen 0·5452955... deutsche Meilen in Stunden, Feldlängen, Ruthen, Schuhe... Duodm. aufgelöst werden.

Auflösung.

0·5452955... M. = x St. + y Fldlg. + z Rth....

$0{\cdot}5452955\ldots \times 2 = 1{\cdot}0905910\ldots$ Stunden;

$$0{\cdot}090591\ldots \times \frac{12703}{200} = 5{\cdot}75388736\ldots \text{ Feldlängen;}$$

$$0{\cdot}75388736\ldots \times \frac{200}{12} = 12{\cdot}56479\ldots \text{ Ruthen;}$$

$0{\cdot}56479\ldots \times 12 = 6{\cdot}77748\ldots$ Fuß, also

$0{\cdot}5452955\ldots$ Ml. = 1 St. 5 Fldlg. 12 Ruthen und 6·77748 Fuß.

III. Wie viele Morgen, Quadratruthen (Duodm.), Klafter, Fuß geben 0·476538 Quadratmeilen?

Auflösung.

0·476538 Qdm. = x Mrg. + y Rth. + z Kftr. ...

$$0{\cdot}476538 \times \frac{6441444}{400} = 7673{\cdot}98210218 \text{ Morgen;}$$

$$0{\cdot}98210218 \times \frac{40000}{144} = 272{\cdot}80616 \ \square\text{Ruthen;}$$

$$0{\cdot}80616 \times \frac{144}{36} = 3{\cdot}22464 \ \square\text{Kftr.;}$$

$0{\cdot}22464 \times 36 = 8{\cdot}08704$ □Fuß, also

0·476538 Qdrm. = 7673 Mrgn. + 272 □Ruthen + 3 □Kftr. + 8·08704 □Fuß.

IV. Wie viele Metzen, halbe Metzen, Vierling, Achtel ... geben 0·56784 Schäffel?

Auflösung.

$0{\cdot}56784 \times 6 = 3{\cdot}40704$ Metzen;

$0{\cdot}40704 \times 4 = 1{\cdot}62816$ Vierling;

$0{\cdot}62816 \times 2 = 1{\cdot}25632$ Achtel;

$0{\cdot}25632 \times 4 = 1{\cdot}02528$ Mäßl; also

0·56784 Schffl. = 3 Mtz. + 1 Vrl. + 1 Achtl. + 1·02528 Mßl.

V. Es sollen 0·625 Gulden in Kreuzer und Pfennige verwandelt werden.

Auflösung.

$0{\cdot}625 = x;$

$0{\cdot}625 \times 60 = 37{\cdot}500$ kr.

$$37{\cdot}5 = 37\frac{1}{2}; \text{ also}$$

0·625 = 37 kr. 2 pf.

II. Reduktion.

Soll eine benannte Zahl als ein Decimalbruch von höherer Ordnung dargestellt werden, so verwandle man sie in einen gemeinen Bruch von derselben (höhern) Ordnung (§. 65) und den gemeinen Bruch in einem Decimalbruch (§. 73).

Beispiele.

I. Es sollen 3 Monate und 1 Woche in einem Jahrdecimalbruch ausgedrückt werden.

Auflösung.

$$((3 \times 4) + 1) : 53 = x;$$

$$\frac{12 + 1}{52} = \frac{1}{4};$$

$$0{\cdot}25 = x.$$

II. Wie viele Schuh machen 7 Zoll 6 Linien und 8 Scrupel Duodm. in einem Duodecimalbruch ausgedrückt?

Auflösung.

$$\frac{((7 \times 12) + 6) \times 12 + 8}{1728} = x;$$

$$\frac{90 \,.\, 12 + 8}{1728} = \frac{1088}{1728};$$

$$0{\cdot}62327 \ldots = x.$$

III. Wie viele Ruthen in einen Decimalbruch ausgedrückt geben 2 □ Kftr. + 28 □′ + 120 □″ + 130 □‴ (Duodcm.)?

Auflösung.

$$\frac{[((2 \,.\, 36) + 28) \times 144 + 120] \times 144 + 130}{20736 \times 144} = x;$$

$$\frac{((100 \times 144) + 120) \times 144 + 130}{2985984} = \frac{14520 \,.\, 144 + 130}{2985984};$$

$$\frac{2091010}{2985984} = 0{\cdot}7 \ldots \text{ Ruthen.}$$

IV. Es sollen 45 ℔. und 24 Loth in einem Zentnerdecimalbruch ausgedrückt werden.

Auflösung.

$$\left(45\frac{3}{4}\right) : 100 = x;$$

$$(45 + 0{\cdot}75) : 100 = 15{\cdot}75 : 100;$$

$$0{\cdot}4575 = x.$$

V. Es sollen 22 kr. 2 pf. in einen Guldendecimalbruch verwandelt werden.

Auflösung.

$$\left(22\frac{1}{2}\right) : 60 = x;$$

$$\frac{45}{2} : 60 = \frac{45}{120};$$

$$\frac{3}{8} = 0{\cdot}375 = x.$$

§. 82.

Aufgabe.

Man verwandle die geometrischen Maaße (§§. 27, 28, 29).

I. von dem Decimalmaaße in das Duodecimalmaaß, und v. v.

II. von dem Duodecimalmaaße in das Decimalmaaß.

I. Aufgabe.

Im Decimalmaaße gegebene geometrische Größen in das Duodecimalmaaß zu verwandeln.

Auflösung.

Da ein und derselbe Fuß (§. 27) für das Decimalmaaß und für das Duodecimalmaaß als Einheit zu Grunde gelegt ist, so drücke man Scrupel, Linien, Zolle, Ruthen ... in Fußmaaße aus (§§. 64, 65, 81) und stelle die verlangte Benennung her.

Beispiele.

I. Es sollen 3° 8′ 6″ 4‴ Decimalmaaß in Ruthen, Fuß, Linien des Duodecimalmaaßes verwandelt werden.

Auflösung.

$$3^\circ\ 8'\ 6''\ 4''' = 3864''' = \frac{3864}{100}{}';$$

$$\frac{3864}{100}{}' : 12 = \frac{322}{100}{}^\circ = 3^\circ + \frac{22}{100}{}^\circ;$$

$$\frac{22}{100}{}^\circ \times 12 = \frac{264}{100}{}' = 2' + \frac{64}{100}{}';$$

$$\frac{64}{100}{}' \times 12 = \frac{768}{100}{}'' = 7'' + \frac{68}{100}{}'';$$

$$\frac{68}{100}'' \times 12 = \frac{816}{100}''' = 8''' + \frac{16}{100}'''';$$

$$\frac{16}{100}'''' \times 12 = \frac{192}{100}''''' = 1''''' + \frac{92}{100}'''''; \text{ also}$$

$3^\circ\ 8'\ 6''\ 4'''$ Decimalmaaß $= 3^\circ\ 2'\ 7''\ 8'''\ 1{\cdot}92''''$ Duodecimalmaaß.

II. Es sollen $8 \square^\circ\ 6 \square'\ 50 \square''\ 30 \square'''$ und $86{\cdot}41$ Decimalmaaß in das Duodecimalmaaß verwandelt werden.

Auflösung.

$$8^\circ\ 6'\ 50''\ 30'''\ 86{\cdot}42 \square'''' = \frac{80650308642}{100000000} \square';$$

$$\frac{80650308642}{144 \times 100000000} = 5 + \frac{60071587{\cdot}79}{100000000} \square^\circ;$$

$$\frac{6007158779 \times 144}{10000000000} = 86 + \frac{5030864176}{10000000000} \square';$$

$$\frac{50308642 \times 144}{100000000} = 72 + \frac{44444448}{100000000} \square'';$$

$$0{\cdot}44444448 \times 144 = 64 + 0{\cdot}00000512 \square'''; \text{ also}$$

$8 \square^\circ\ 6 \square'\ 50 \square''\ 30 \square'''\ 86{\cdot}42 \square''''$ Decimalmaaß $= 50 \square^\circ\ 86 \square'\ 72 \square''\ 64 \square'''$ Duodecimalmaaß.

III. Es sollen 182 c° 805 c' 851 c'' 779 c''' 513·888 c'''' Decimalmaaß in das Duodecimalmaaß verwandelt werden.

Auflösung.

$$182\ c^\circ\ 805\ c'\ 851\ c''\ 779\ c'''\ 513{\cdot}888\ldots c'''' \text{ Decmß.} = x;$$

$$\frac{182805851779513888\ c'}{1000000000000} = x;$$

$$\frac{182805851779513888\ c^\circ}{1728 \times 1000000000000} = x;$$

$$105{\cdot}790423483515\ c^\circ = x;$$

$$0{\cdot}79042348\ldots \times 1728 = 1365{\cdot}8517795\ldots$$

$$105\ c^\circ\ 1365{\cdot}8517795139\ c' = x;$$

$$0{\cdot}851779\ldots \times 1728 = 1471{\cdot}875\ldots$$

$$105\ c^\circ\ 1365\ c'\ 1471{\cdot}875\ c'' = x;$$

$$0{\cdot}875\ldots \times 1728 = 1511\ldots$$

$105\ c^\circ\ 1365\ c'\ 1471\ c''\ 1521\ c'''$ Duodecmß. $= x.$

Man verwandle zur Uebung:

IV. $15^\circ\ 9'\ 8''\ 6'''\ 5''''$ Decimalmaaß in das Duodecimalmaaß.

V. 204 □° 84 □′ 98 □″ 76 □‴ 50 □⁗ Decimalmaaß in das Duodecimalmaaß.

VI. 89 c° 974 c′ 765 □″ 471 □‴ 875 □⁗ Decimalmaaß in das Duodecimalmaaß.

II. Aufgabe.

Im Duodecimalmaaße gegebene geometrische Größen in das Decimalmaaß zu verwandeln.

Auflösung.

Man mache die im Duodecimalmaaße gegebenen Größn. zu Fußen, und stelle die verlangte Benennung her (nach §§. 64, 65, 81).

Beispiele.

I. Man verwandle 6° 11′ 10″ 8‴ und 9⁗ Duodecimalmaaß in das Decimalmaaß.

Auflösung.

$$6° \; 11' \; 10'' \; 8''' \; 9'''' \text{ Duodecmß.} = (72 + 11)' \; 10'' \; 8\frac{3}{4}''';$$

$$83' + \left(10 + \frac{35}{48}\right)'' = 83 + \frac{515}{576}';$$

$$83{\cdot}894097 \ldots = 8° \; 3' \; 8'' \; 9''' \; 4{\cdot}097'''' \text{ Decmß.}$$

II. Man verwandle 78 □° 135 □′ 64 □″ 72 □‴ Duodecimalmaaß in das Decimalmaaß.

Auflösung.

$$78\,□° \; 135\,□' \; 64\,□'' \; 72\,□''' \text{ Duodecmß.} = x;$$

$$((78 \times 144) + 135)' + 64\frac{1}{2}'' = x;$$

$$10530 + 135 + \frac{129}{288} = x;$$

$$10665 + \frac{43}{96} = x;$$

$$10665{\cdot}4479166 \ldots = x; \text{ also}$$

$$x = 106\,□° \; 65\,□' \; 44\,□'' \; 79\,□''' \; 16{\cdot}6\,□'''' \text{ Decmß.}$$

III. Man verwandle 19 c° 1568 c′ $1295\frac{1}{8}$ c″ 875 c‴ Duodecimalmaaß in das Decimalmaaß.

Aufløsurg.

$$19\,c° \; 1568\,c' \; 1295\frac{1}{8}\,c'' \; 875\,c''' \text{ Duodecmß.} = x;$$

$$((19 \times 1728) + 1568)\,c' + \left(1295\frac{1}{8} + \frac{7}{8}\right)c'' = x;$$

$$32832 + 1568\,c' + 1296\,c'' = 34400 + \frac{1296}{1728};$$

$$34400 + \frac{324}{432} = 34400 + \frac{81}{108} = 34400 + \frac{9}{12};$$

$$34400 + \frac{3}{4} = 34400{\cdot}75;\ \text{also}$$

$$x = 34\,c^{0}\ 400\,c'\ 750\,c''\ \text{Decimalmaaß.}$$

Man verwandle zur Uebung:

IV. 17° 11′ 11″ 10‴ 9⁗ Duodecimalmaaß in das Decimalmaaß.

V. 159□° 143□′ 108□″ 132‴ 128□⁗ Duodecimalmaaß in das Decimalmaaß.

VI. 83□° 137□′ 79□″ Duodc. in das Decimalmaaß.

VII. 1004 c° 1578 c′ 1446 c″ 1053 c‴ 645 c⁗ Duodecimalmaaß in das Decimalmaaß.

VIII. 876 c° 352 c′ 641 c‴ Duodecimal in das Dzmß.

§. 83.

Erklärungen (§. 80. 2. b. *).

1) Eine **Kreislinie** (Umkreis, Peripherie [circulus, circumferentia, περιφέρεια] = P; = p) ist eine in sich selbst zurückkehrende Linie, deren jeder Punkt von einem Punkte gleich weit absteht.

Der Punkt, von welchem alle Theile der Kreislinie gleich weit abstehen, muß in der Mitte der Kreislinie liegen und heißt der **Mittelpunkt** (Centrum = C; = c) des Kreises.

Eine von dem Centrum an die Peripherie gehende gerade Linie heißt der **Radius** (radius = R; = r) des Kreises.

Eine durch den Mittelpunkt einer Kreislinie gehende, die Kreislinie an zwei Punkten berührende, gerade Linie heißt der **Durchmesser** (diameter = D; = d) des Kreises. — (Der Radius ist die Hälfte des Durchmessers und heißt daher **Halbmesser** (semidiameter).

Eine durch eine Kreislinie begränzte Fläche heißt **Kreisfläche** (area, planities circuli = Ar; = ar. Cir.). Fig. II. (Kreisbogen, Kreisausschnitt, Kreisabschnitt).

Wird aus einer Kreisfläche eine andere concentrische herausgenommen, so wird hiedurch ein **Ring** (anulus = anl) gebildet. Fig. II. und X.

(Größere und kleinere Radius des Ringes).

* Andere des Merkens werthe Flächen sind das Parallelogramm, das Dreieck, das Trapez und die regulären Flächen...

2) Ein von zwei gleich großen, parallelen Kreisflächen und von einer in sich selbst zurückkehrenden Seitenfläche begränzter Körper heißt eine **Walze** (Cylinder [cylindrus] = cyl). Fig. IX.

Jene den Cylinder begränzende Kreisfläche, welche man an dem Cylinder sich unten denkt, heißt die **Grundfläche, Basis** (basis = B; = b) der Walze.

Die kürzeste gerade Linie, welche die beiden parallelen den Cylinder begränzenden Kreisflächen verbindet, heißt die **Höhe** (= h = H [altitudo = A; = a]) der Walze.

(Oberfläche, Seitenfläche (Mantel) des Cylinders.)

Wird aus einer Walze eine concentrische Walze herausgenommen, so wird hierdurch ein Rohr (Röhre = tubus = tb.) gebildet. Fig X.

(Seitenflächen, Oberfläche des Rohrs).

* Der Cylinder ist ein **Prisma**, in welchem die Basis ein reguläres Unendlicheck, d. i. eine Kreisfläche ist. Andere Prismen sind Fig VII. (ein Dreiseitiges), Fig. V. (ein Parallelopiped), Fig. VIII. (ein sechsseitiges Prisma).

3) Ein von einer Kreisfläche und von einer in sich selbst zurückkehrenden, in einer Spitze sich endigenden Seitenfläche begränzter Körper heißt ein **Kegel** (conus = con). Fig. XIII. (Basis, Höhe, Seitenfläche (Mantel), Oberfläche des Kegels).

Ein von zwei ungleichen, parallelen Kreisflächen und einer in sich zurückkehrenden Seitenfläche begränzter Körper heißt ein **abgekürzter Kegel** (con. truncatus = con. tr.). Fig. XIV.

(Basis, Höhe, Seitenfläche (Mantel), Oberfläche des Kegels).

Ein Faß (dolium) kann betrachtet werden als ein Körper von zwei abgekürzten Kegeln, deren Basen beim Spunde an einander gefügt sind. Die Höhe eines jeden dieser Kegel ist gleich der halben **Faßlänge** $(= \frac{1}{2} . L = \frac{1}{2} . l)$; die Durch-

messer der die abgekürzten Kegel begränzenden Kreisflächen sind die Durchmesser der Faßböden (= d = δ), und der Durchmesser des Fasses beim Spunde die Spundhöhe (= D).

* Der Kegel ist eine Pyramide, in welcher die Basis eine Kreisfläche ist. Andere Pyramiden sind Fig. XI. (eine dreiseitige), Fig. XII. (eine vierseitige, schiefe).

4) Ein allenthalben runder Körper, von welchem jeder Punkt von seiner Begränzung von einem Punkte gleich weit absteht, heißt Kugel (globus. sphaera, σφαῖρα, = sphr.). (Mittelpunkt, Radius (Halbmesser), Durchmesser, Umfang, Oberfläche der Kugel (concentrische hohle Kugel)).

* Die Kugel kann als ein reguläres Polyäder von unendlich vielen Seitenflächen angesehen werden. Reguläre Körper sind das Tetraeder, das Oktoeder, das Ikosaeder, das Heraeder (Fig. V.) und das Dodekaeder.

§. 84.

Sätze und Formeln (§. 80. 2. b. *)

1) Wenn man den Durchmesser (d) oder den doppelten Radius (2 r) mit π multiplicirt, so erhält man die Länge der Kreislinie (p); d. i.

$$d . \pi = 2r . \pi = p.$$

Zus. Wenn man die Länge der Kreislinie durch π dividirt, so erhält man den Durchmesser oder den doppelten Radius der Kreislinie; d. i.

$$\frac{p}{\pi} = d = 2 . r.$$

Den Flächeninhalt einer Kreisfläche erhält man, wenn man entweder

α) den Durchmesser mit sich selbst und mit π multiplicirt und das Produkt durch 4 theilt, d. i.

$$\text{Cir. ar.} = \frac{d \times d \times \pi}{4}; \text{ oder}$$

β) wenn man den Halbmesser einer Kreisfläche mit sich selber und mit π multiplicirt; d. i.

$$\text{Cir. ar.} = r \times r \times \pi.$$

Zus. Den Flächeninhalt eines Ringes erhält man, wenn man entweder

α) den größern und den kleinern Radius mit sich selber multiplicirt und die Differenz aus diesen Produkten mit π vermehrt; d. i.

$$\text{anl.} = (R \,.\, R - r \,.\, r) \times \pi$$ oder

β) die Summe beider Radien mit ihrer Differenz und mit π multiplicirt; d. i.

$$\text{anl.} = (R + r) \times (R - r) \times \pi.$$

* Es sey die Seite einer regulären Fläche gleich a, so ist die Formel für den Flächeninhalt

des regulären Dreieckes = a . a . 0.4333...
" " Viereckes = a . a (Fig. IV.)
" " Fünfeckes = a . a . 1·720475...
" " Sechseckes = a . a . 2·5999...

2) Die Oberfläche einer Walze erhält man, wenn man die Kreislinie der Basis mit der Höhe der Walze multiplicirt und zu diesem Produkte den doppelten Flächeninhalt der Basis addirt; d. i.

$$\text{Ar. Cly.} = (p \times a) + (2 \,.\, r \,.\, r \,.\, \pi);$$
$$= (2 \,.\, r \,.\, \pi \,.\, a) + (2 \,.\, r \,.\, r \,.\, \pi);$$
$$= 2 \,.\, r \,.\, \pi \,.\, (r + h) = d \,.\, \pi \left(\frac{d}{2} + h\right).$$

1. Zus. Die Seitenfläche der Walze

$$\text{M. Cyl.} = p \times a = 2 \,.\, r \,.\, \pi \,.\, a = d \,.\, h \,.\, \pi.$$

2. Zus. Die Oberfläche eines Rohres

$$\text{Ar. tb.} = 2 \,.\, \pi \,.\, [(R + r) \times (R - r + h)].$$

Den Kubikinhalt eines Cylinders erhält man, wenn man die Basis des Cylinders mit seiner Höhe multiplicirt, d. i.

$$\text{Cyl.} = b \times a = \pi \,.\, r \,.\, r \,.\, a = \frac{\pi \,.\, d \,.\, d \,.\, a}{4} = 0{\cdot}25 \times a \,.\, d \,.\, d \,.\, \pi.$$

Zus. Den Kubikinhalt eines Rohres

$$\text{tb.} = 0{\cdot}25 \times a \,.\, \pi \,(D \,.\, D - d \,.\, d);$$
$$= a \,.\, \pi \,(R + r) \,.\, (R - r).$$

* Den Kubikinhalt eines Prismas erhält man, wenn man Höhe mit Basis multiplicirt. Wie erhält man die Oberfläche des Prismas?

3) Die Oberfläche eines Kegels erhält man (im Falle, daß der Radius der Basis und die Höhe des Mantels (l) gegeben sind), wenn man die Höhe des Mantels mit dem Radius der Basis und mit π multiplicirt, und zu diesem Produkte r . r . π addirt; d. i.

$$\text{Ar. Con.} = r \cdot l \cdot \pi + r \cdot r \cdot \pi = r \cdot \pi \cdot (l + r), \text{ oder}$$

$$= \frac{d \cdot \pi}{4} \times (2 \cdot l + d).$$

Zus. Der Mantel des Kegels; d. i.

$$\text{M. con.} = r \cdot l \cdot \pi = 0{\cdot}5 \cdot d \times l \cdot \pi.$$

Den Kubikinhalt des Kegels erhält man, wenn man die Basis mit der Höhe multiplicirt und das Produkt durch 3 theilt; d. i.

$$\text{con.} = \frac{b \cdot a}{3} = \frac{r \cdot r \cdot \pi \cdot a}{3} = \frac{\pi \cdot d \cdot d \cdot a}{3 \cdot 4}.$$

Die Formel für die Oberfläche des abgekürzten Kegels ist, wenn R den größern, r den kleinern Radius und l die Länge des Mantels bezeichnet:

$$\text{Sprf.} = \pi \cdot [(R + r) \cdot l + (R \cdot R) + (r \cdot r)].$$

Den Kubikinhalt eines abgekürzten Kegels erhält man, wenn man mit dem dritten Theile von π in die Höhe des abgekürzten Kegels multiplicirt den mit sich selbst multiplicirten Radius der größern Kreisfläche, den mit sich selbst multiplicirten Radius der kleinern Kreisfläche und das Produkt der Radien beider Kreisflächen, die den Con. tr. begränzen; d. i.

$$\text{Con. tr.} = \frac{\pi \cdot a}{3} \times [(R \cdot R) + (r \cdot r) + (R \cdot r)].$$

Den Kubikinhalt eines Fasses erhält man, wenn man mit dem zwölften Theile von π in die ganze Faßlänge ($= L$) multiplicirt die mit sich selber multiplicirende Spundhöhe, den mit sich multiplicirten Durchmesser der Faßboden und das Produkt aus der Spundhöhe in den Durchmesser der Faßboden; d. i.

$$\text{dol.} = \frac{L \cdot \pi}{12} \times [(D \cdot D) + (d \cdot d) + (D \cdot d)]$$

$$= \frac{l \cdot \pi}{3} \times (R \cdot R + r \cdot r + R \cdot r).$$

• Den Kubikinhalt einer Pyramide, wenn man Höhe mit Basis multiplicirt und durch drei dividirt; d. i.

$$\text{Pyr.} = \frac{h \cdot b}{3}.$$

4) Den Durchmesser oder doppelten Radius einer Kugel

erhält man, wenn man die Peripherie (den größten Kreis [aequator]) der Kugel durch π dividirt; d. i.

$$d = 2 . r = \frac{p}{\pi}.$$

Zus. Die Peripherie einer Kugel erhält man, wenn man den Durchmesser oder den doppelten Radius mit π multiplicirt; d. i.

$$p = \pi \times d = \pi . 2 . r.$$

Die Oberfläche (superficies) der Kugel erhält man, wenn man den Radius mit sich selbst, mit 4 und mit π multiplicirt; d. i.

$$\text{supf. sph.} = r . r . 4 . \pi = d . d . \pi.$$

Den Kubikinhalt einer Kugel erhält man, wenn man die Oberfläche mit dem Radius multiplicirt und das Produkt durch 3 dividirt; d. i.

$$\text{sph.} = \frac{\text{supf.} \times r}{3} = \frac{4 . r . r . r . \pi}{3} = \frac{d . d . d . \pi}{6}.$$

Zus. Will man aus dem kubischen Inhalt einer Kugel die Oberfläche derselben, so hat man den Kubikinhalt derselben mit 3 zu multipliciren und das erhaltene Produkt durch den Radius der Kugel zu dividiren; d. i.

$$\text{supf.} = \frac{3}{r} \times \text{sph.} = \frac{3}{r} \times \frac{4 . r . r . r . \pi}{3} = 4 . r . r . \pi.$$

• Wenn in einem regulären Polyeder die Kante gleich a ist, so ist für die Oberfläche die Formel

des Tetraeders	= a . a . 1·7320508
des Octoeders	= a . a . 3·4641016
des Ikosaeders	= a . a . 8·6602540
des Hexaeders	= 6 . a . a.
des Dodekaeders	= a . a . 20·6457

und für den kubischen Inhalt

des Tetraeders	= a . a . a . 0·11785113
des Octoeders	= a . a . a . 0·47140453
des Ikosaeders	= a . a . a . 2·181695
des Hexaeders	= a . a . a.
des Dodekaeders	= a . a . a 7·663119.

§. 85.

Erklärungen (§. 80 2. b. *).

I. Vom Gewichte der Körper.

1) Der Druck, welchen ein Körper auf einen ihn vollkommen unterstützenden Körper ausübt, heißt das Gewicht (§. 30), und zwar das absolute Gewicht, wenn nicht auf den Rauminhalt des drückenden Körpers Rücksicht genommen wird.

2) Das Gewicht eines Körpers in Rücksicht auf einen bestimmten Raum, welchen er einnimmt (auf ein bestimmtes Volumen), heißt das respective Gewicht des Körpers.

3) Mehrere verschiedenartige Körper haben unter demselben Volumen und bei derselben Temperatur verschiedene Gewichte. Man nimmt einen Körper (gewöhnlich das destillirte Wasser oder das Regenwasser) unter einem bestimmten Volumen (gewöhnlich unter dem Volumen von einem Kubikfuß) als Einheit an, und nach dieser Einheit wird das Gewicht der übrigen Körper unter gleichem Volumen angegeben. Die Größe, welche das Verhältniß angibt, in welchem das Gewicht des zur Einheit angenommenen Körpers zu dem Gewichte eines andern Körpers unter gleichem Volumen steht, drückt das specifische Gewicht des Körpers aus. Z. B. wenn man sagt, das specifische Gewicht des Bleies ist gleich **11·3523**; so heißt das: Wenn möglichst wenig (ein Atom) Wasser **1** wiegt, so wiegt dasselbe Volumen (ein Atom) Blei **11·3523**; oder wenn man sagt, das specifische Gewicht des Lindenholzes ist gleich **0·604**, so heißt dieses auch: Wenn ein bestimmtes Volumen Wasser (der bayer. Kubikfuß) **44·17** bayerische ℔. wiegt, so wiegt dasselbe Volumen Lindenholz **44·17** $\times$ **0 604** ℔.

4) Wenn das Gewicht (eines Atoms) des Wassers der Einheit gleicht, so ist für nachstehende

Körper	das spezf. Gewicht.	Körper	das spezf. Gewicht.
Alabaster	2·74*	Gummi, Arabischer	1·45
Alaun	1·72	Gyps dichter	1·875*
Alkohol	0·792	Gyps fasrichter	2·308*
Asbest	2·9958	Gyps körnigter	2·2*
Atmosphärische Luft	0·001296	Holzarten:	
Baryt	3·3	Accacien-	0·8*
Basalt	2·66*	Ahorn-	0·755
Bergkrystall	2·653	Apfelbaum-	0·733
Bernstein	1·06	Birken- frisch	0·7*
Bier braunes	1·034	Birken- trocken	0·58*
Bier weißes	1·023	Birnbaum-	0·611*
Blausäure	0·705	Buchen- roth	0·852
Blei deutsches	11·3523	Buchen- weiß	0·918*
Blei englisches	11·310*	Buchsbaum-	1·33
Butter	0·942	Eben-	1·209
Chalcedon	2·691	Eichenkern-	1·17
Dachschiefer	3·085*	Erlen-	0·6*
Diamant	3·531 3·501	Eschen-	0·845
Eisen gegossen	7·207	Fichten-	0·458*
Eisen geschmiedet	7·788	Kiefern-	0·6*
Eisen Harzer	8·291*	Kirschbaum-	0·715*
Eisen Schwedisch.	8·341*	Linden-	0·604
Eisen Suhler	8·215*	Mahagony-	1·063
Eisenschlacke	2·855*	Nußbaum-	0·671
Elfenbein	1·917	Pappel-	0·381
Erde lehmige, frisch	2·063*	Pflaumbaum-	0·398*
Erde „ trock.	1·929*	Tannen-	0·55
Erde Gartenerde, fr.	2·047*	Ulmen- (Holz)	0·8
Erde „ trock.	1·63*	Holzkohle	0·28 0·44
Essigsäure	1·063	Hyacinth	4·35 4·6
Federharz	0·989	Jaspis	2·358
Fett	0·923	Kalkspath	2·7182
Flußspath	3·1911	Kalkstein dichter	2·4*
Glas Bouteillengl.	2·642	Kalkstein gebrannt.	1·274*
Glas Flintglas	3·329	Kalkstein körnigter	2·7
Glas Kronglas	2·520	Kampfer	0·988
Glas weißes Glas	2·988	Kieselschiefer	2·6*
Gold gegossen	19·2581	Kopal	1·139
Gold geschmiedet	19·3617	Korallen	2·68
Granat	3·84 4·25	Kork	0·24
Granit	2·8*	Kreide	2·675
Graphit	1·0		

Körper	das spezf. Gewicht.	Körper	das spezf. Gewicht.
Kupfer gegossen	8·788	Salz Glaubersalz	2·246
geschmiedet	9·0	Kochsalz	1·918
in Draht	8·8785	Salzsolle gesättiget	1·207
Magneteisenstein	4·094	Saphir (orient.)	3·9941
	4·8	Schwefel	1·8
Marmor Bareuther	2·84*	Schwefeläther	0·874
Corrischer	2·716	Schwefelsäure	1·84
von Poras	2·8376	Schwerspath	4·4322
Meerwasser	1·026	Silber gehämmert	10·51
Messing	8·916	gegossen	10·4743
Meteorstein	3·55	Smaragd	2·7755
Milch	1·03	Stahl geschlagen	7 819*
Oel Leinöl	0·940	ungeschlagen	7·833*
Olivenöl	0·915	Steinkohlen	1·429
Steinöl	0·847	Stroh	0·053*
Terpentiöl	0·870	zusammgepr.	0·125*
Platina Blech	22·069	Talkerde	2·31
Drath	21·0417	Tannenharz	1·072
gereinigt	19·5	Thonerde	1·669
geschmied.	20·3366	Topas (orient.)	4·0106
Perlen	2·75	Turmalin	3·1555
Phosphor	1·821	Wachs gelbes	0·965
Porcellan	2·384	weißes	0·968
Quarz	2·888	Wallrath	0·943
Queck- englisches	13·598	Wasser destillirt	1·000
silber deutsches	14·0*	Wein Bordeaux	0·933
Rubin (orient.)	4·2833	Burgunder	0·991
Salmiak	1·453	Rhein	0·999
Salpeter	1·9	Ziegel gebrannte	1·41
Salpetersäure	1·217		2·215*
Sand gem. trocken	1·638*	Zink gegossen	6·861
aus Bächen	1·9*	Zinn gegossen	7·2914
mit W. gesätt.	1·945*	gehämmert	7·2990
Sandrack	1·092	Zucker weißer	1·606
Sandstein	2·3*		

* Die vorstehenden und nachfolgenden Angaben, welche nicht mit * bezeichnet sind, sind entnommen der Physik von Dr. Th. Siber; die mit * bezeichneten sind nach Eytelwein.

Spezif. Gewicht für ausdehnsame Flüssigkeiten, wobei die atmosphär. Luft = 1 gesetzt ist.

Atmosphär. Luft	1.000	Oxydirtes Stickgas	1·5204
Alkoholdampf	1·6133	Salzätherdampf	2·219
Chlorgas	2·47	Sauerstoffgas	1·1036
Hydrothiongas	1·1912	Schwefelätherdampf	2·586
Kohlenoxydgas	0·9569	Stickgas	0·976
Kohlensaures Gas	1·524	Wasserdampf	0·6235
Kohlenwasserstoffgas	0·555	Wasserstoffgas	0·0688
Oelbildendes Gas	0·978		

II. Bewegung der Körper.

1) Alle Veränderungen in den Naturkörpern geschehen im Raume und in der Zeit. Eine Veränderung im Raume von der Art, daß ein Körper seinen Ort verläßt und in einen andern übergeht, geschieht durch Bewegung (freie oder nicht freie) und gleichsam in einer Linie (gerader oder krummer). Die Linie heißt der durchlaufene Weg [spatium (= s)]. Von diesem Wege werden entweder bestimmte gleiche Theile in gleichen oder ungleichen Zeittheilen, oder in bestimmten gleichen Zeittheilen gleiche oder ungleiche Theile durchlaufen, und man hat daher gleichförmige und ungleichförmige (beschleunigte und verzögerte) Bewegung.

2) Die Angabe des Raumes, welchen ein sich gleichförmig bewegender Körper in einer bestimmten Zeit [tempus (= t)] durchläuft, drückt die Geschwindigkeit [celeritas (= c)] des Körpers aus.

3) Die zur Bestimmung der Geschwindigkeit angenommene Zeit ist (gewöhnlich) eine Sekunde. Die zu dieser Bestimmung angenommene Raumgröße ist gewöhnlich der Fuß. Sagt man z. B. die Geschwindigkeit einer Schnecke ist gleich 0·005415... Fuß, so heißt dieses: eine Schnecke legt in einer Secunde 0·005415... Fuß zurück.

Angabe einiger wissenswerther Geschwindigkeiten.

Benennung des bewegten Körpers.	Geschwindigkeit in bayer. Fuß.
Militär im Doublirschritte	5·4155
„ im Reiseschritte, womit täglich 3 Meilen zurückgelegt werden	4·3324
„ im Manövrirschritt, geschlossen . .	3·2493
Ein Schlittschuhlaufer von vieler Uebung .	41·1378
Ein Mann im stärksten Laufe . . .	27·0775
Ein englischer Laufer . . .	12·9972 14·0803
Ein herrschaftlicher Laufer	9·7479
Ein unbelasteter, des Gehens gewohnter Mann, bei täglich zehnstünd. Gehen (nach Schulze)	5·4155
Ein solcher mit einer Schrittweite von 2½ Fuß	4·87395
Ein solcher, bei täglich achtstündigen Gehen, wobei 4 Meilen, jede zu 4000 W. Klafter zurück gelegt werden (nach Prechtl) .	3·57423
Ein mit 25 ℔. belasteter Mann, bei 8stünd. Gehen Ein mit 20 ℔. belastetes Weib, „ „ „	2·70775
Ein mit 45 ℔. belasteter Mann, bei 6stündiger Arbeit	2·38285
Ein Mann, mit einer um die Schultern gehenden Gurte, bei 30 ℔. Zugkraft Ein Mann, beim Vorwärtsstoßen mit einer Kraft von 25 ℔. . . .	2·1662
Ein Mann mit einem mit 100 ℔. belasteten Schubkarren . ; . . .	1·84127
Ein Mann, unbelastet beim Treppensteigen, achtstündige Arbeit	0·54155
Ein Mann mit 100 ℔. belastet . . .	0·36103
West legte 480 engl. Fuß in 16 Sek. zurück	31·17128
Farguharson lief im Hydepark eine englische Meile in 4 Min. 6 Sek. in vier Absätzen, bei deren jedem er 5 Minuten stehen blieb, um zu Athem zu kommen . . .	22·42017

Benennung des bewegten Körpers.	Geschwindigkeit in bayer. Fuß.
Wertwood legte eine engl. Meile in 4 Min. 52 Sek. zurück, doch rastete er nach der zweiten Minute durch 5 Sekunden .	18·73763
Duttey legte denselben Weg bei regnerischer Witterung in 28 Min. 45 Sek. zurück .	15·92157
Cap. Huith ging 5 engl. Meil. weit in 30 Min.	15·37902
Cootes machte hinter einander 1000 englische Meilen in 100 Stunden, wobei er 28 ℔. seines Gewichtes verlor . . .	15·27171
Der Schnelllaufer (Göhrich) legte an einem Tage 12½ engl. Meilen in fünf Viertelstunden, am andern 10½ engl. Meilen in drei Viertelstunden zurück . . .	14·40523
Der achtzehnjährige Irländer O' Nell machte 46 engl. Meil. in 7½ Stunden . .	9·31466
Haberdeen machte den Weg von Canterbury nach London (63 engl. Meilen) in 10 Stunden 57½ Minuten . . .	7·90603
Ortner ging von Wien nach St. Pölten und wieder zurück (nahe 17 Meilen) bei schlüpfrigem Wege in 17 Stunden	7·14846
Conyngham machte in 53 aufeinander folgenden Stunden 200 engl. Meilen .	5·44043
Tenney ging (schon 50 Jahr alt) von London nach York und wieder zurück in 5 auf einander folgenden Tagen . . .	5·4155
Steer legte einen hügeligen Weg von 112 engl. Meilen in 37 Stunden zurück .	4·65733
Abemelly ging einen Rundweg von 260 engl. Meilen in 4 Tagen	4·3324
Militär Reitpferd im Galopp . . .	28·70215
= = = Trabb	14·400523
= = = gewöhnlichen Marschschritt	5·19888
= = = Paradeschritt . .	4·3324

Benennung des bewegten Körpers.	Geschwindigkeit in bayer. Fuß.
Ein Pferd ohne Belastung im stärksten Trabb 8 Stunden des Tages . . .	10·831
Postpferd 1 Meile in einer Stunde . .	6·4986
Ein Pferd mit einer Läst von 150 ℔. . .	4·3324
Ein Pferd mit einer Last von 225 ℔. 10 Stunden des Tages	3·79085
Reitstaffete zwischen Washington und Baltimore	30·3268
Der Renner Sterling oder Eklipse, der beim Ausstrecken an 19 Fuß bedeckte .	86·648
Lady Jackson machte auf dem Rücken der Eklypse 1 engl. Meile in 1 Min. 44 Sek.	52·96359
Ein ungarisches Pferd beim Wettrennen zu Ekatarinoslow, 6 Werste in 8 Minuten .	45·4902
Der Traber Miß Tunner, der 1 engl. Meile in 2½ Minuten in Trabb machte . .	36·71709
Der beste amerikanische Traber, 1 engl. Meile in 2 Minuten 35 Sekunden . .	35·52368
Der Traber Rattler, der 10 engl. Meilen in 30 Minuten 40 Sekunden machte .	30·00187
Der amerikanische Traber Tom Thunich, der 100 engl. Meilen in 10 St. zurück legte	15·27171
Pferde auf der Rennbahn zu Neumarket, wo 1 engl. Meile höchstens in 2 Minuten zurück gelegt werden muß . : . .	10·93931
Ein Windhund	87·7311
Ein Kameel in der Wüste	3·68254
Eine Schnecke	0·00541
Ein Faulthier	0·00361
Gesetzlich bestimmter Gang eines Eilwagens	10·58583 9·62347 8·14346
Gesetzlich bestimmter Gang eines engl. Eilwagens, mit 16 bis 21 Reisenden, 16 Min. die engl. Meile	15·27171
Gesetzlich bestimmter Gang eines französischen Eilwagens	9·20635

Benennung des bewegten Körpers.	Geschwindigkeit in bayer. Fuß.
Oesterreichischer Eilwagen	
auf ebener Strasse in 1½ Stunden 2 Meilen .	9·63959
auf gebirgiger Strasse in 2 Stunden 2 Meilen	7·25677
Gemeine Landkutschen, 8 Meilen in 10 Stunden	5·44043
Ein Amerikaner fuhr im Jahre 1827 mit 2 Pferden 100 engl. Meilen in 14 Stunden	10·93931
Landkutsche Wellington und Forester, zwischen Manchester und Scheffield . .	21·6620
Landkutsche Tally = Ho zwischen London und Birmingham	25·9942
Ein mit 100 K. beladener Ochs, bei achtstündiger Arbeit	2·70775
Ein Paar Ochsen bei einer Zugprobe zogen 34 Ztr. in 29 Minuten 11 Sekunden 1400 Klafter weit	5·166387
Ein Rennthier an einem Schlitten . .	28·1606
Auf der Eisenbahn zwischen Darlington und Stockton macht eine mit 1 Pferd bespannte Landkutsche mit 22 Reisenden 10¼ Meilen in 1 Stunde	15·70495
Auf der Böhmischen Eisenbahn zwischen Linz und Budweis mit 120 Ztr. in 1½ Stunden 1 Meile	7·25677
Auf einer deutschen Eisenbahn macht 1 Pferd mit einer Last von 162 Ztr. in 10 Stunden 20 engl. Meilen	3·03268
Ogle's Dampfwagen bei der Probefahrt von Liverpool nach London 36 Meil. in 1 Std.	55·12979
Der Dampfwagen Novelty	30·3268
Der Dampfwagen Infant auf der Straße bei der Probefahrt zwischen London und Brighton in 1 Stunde bei 10 Meilen . .	15·27171
Der Dampfwagen Wilhelm IV., zwischen Liverpool und Manchester mit 1093 Ztr. Last	14·0803

Benennung des bewegten Körpers.	Geschwindigkeit in bayer. Fuß.
Der Dampfwagen auf Hitton Rail = Way, mit 1287 Ztr. Last	7·25677
Ein Dampfwagen von München nach Augsburg (durchschnittlich) .	22·936
= = = Nürnberg nach Fürth (durchschnittlich) .	35·3
Ein mit 2 musselinenen, 20 Fuß hohen Drachen bespannten Wagen, der 5 engl. Meilen in 15 Min. zurücklegt	30·65173
Ein Schlitten mit Segel, wie ihn die Bewohner der dänischen Insel Mors brauchen .	8·6648
Ein Wallfisch, der 9 engl. Meilen in 1 Stunde macht	14·0803
Ein schwimmender Eisbär	4·22409
Ein bei mäßigem Winde segelndes Schiff .	2·1662
= = starkem = = = = .	2·38282
Das Dampfboot Novelty	30·3268
Amerikanische Dampfschiffe der besten Art .	25·9944
Das Dampfboot City of Bristol, welches in 24 Stunden 300 engl. Meilen macht .	19·17087
Das Packetboot Bonnafé zwischen New = York und Hâvre, welches in 16 Tagen 1075 französ. Meilen zurück legt . . .	15·1634
Das italienische Dampfboot Verbano, welches bei ruhigem Wasser in 1 Stunde 6½ engl. Meilen macht	9·96452
Das italien. Dampfboot Erzh. Rainer, welches in 1 Stunde 6¼ engl. Meilen macht	9·63959
Das Dampfboot Lario und Plinio, das in 1 Stunde 6 Meilen macht . .	9·20635
Die Donau	6·498
Ein Adler	103·9776
Ein Falke	76·9001
Eine Fliege im Zimmer des Kaisers Domitian	54·155

Benennung des bewegten Körpers.	Geschwindigkeit in bayer. Fuß
Eine Fliege im gewöhnlichen Fluge . .	5·4155
Posttaube, welche in $5\frac{1}{2}$ Stunden von London nach Antwerben (60 engl. Meilen) flog .	15·70495
Luftballon von Rom nach Paris (176 Meilen in 22 Stunden)	56·3212
Kugel aus einer Windbüchse bei 100maliger Luftverdichtung	1949·58
Zweilöth. Kugel bei einer Ladung von $\frac{3}{8}$ Loth Pulver in der Lauflänge circa 53 Zoll . .	1839·1038
in der Lauflänge circa 38 Zoll . .	1758·9544
in der Lauflänge circa 19 Zoll . .	1416·6948
in der Lauflänge circa 9 Zoll . .	753·8376
Zwölfpfünd. Kanonenkugel im Durchschnitte .	866·48
Kugel aus einer Militärmuskete . . .	1299·72
Wind, kaum bemerkl. (mit einem Druck v. 0·005 Ä.)	1·535121
„ bemerklich „ „ „ „ 0·044 Ä.)	4·59492
„ windig „ „ „ „ 0·492 Ä.)	15·31988
„ sehr windig „ „ „ „ 1·928 Ä.)	28·5511
„ außerordentlich stark „ „ „ 7·873 Ä.)	61·279524
Orkan, Wind, welcher Bäume und Häuser umstürzt (mit einem Druck von 30 — 50 Ä.)	122·18 bis 152·4678
Schall in der atmosphärischen Luft . .	1137·255
Das Licht (Römer's Entdeckung 1675) .	42000 Ml.
Telegraph zwischen Liverpool und Holyhead (156 engl. Meilen in 35 Sek.) . . .	24596·118
Telegraph zwischen Straßburg und Paris (60 geograph. Meilen in $6\frac{1}{2}$ Sek.) . .	3931·653

* Beinahe alle angeführten Angaben der Geschwindigkeiten sind entnommen der Mechanik von Baumgartner.

§. 86.

Sätze und Formeln (§. 80. 2. b. *).

I. Sätze in Rücksicht der Gewichte der Körper.

1) Das absolute Gewicht (P) getheilt durch das Volum (V) eines Körpers gibt sein specifisches Gewicht (S); d. i.

$$S = \frac{P}{V}.$$

1. Zusatz. Das Volumen eines Körpers ist gleich dem durch das spezifische Gewicht getheilten absoluten Gewichte; d. i.

$$V = \frac{P}{S}.$$

2. Zusatz. Das absolute Gewicht eines Körpers gleicht dem Produkte aus dem Volumen und dem spezifischen Gewichte; d. i.

$$P = S \,.\, V.$$

2) Bringt man Körper (feste oder flüssige) in eine Flüssigkeit, welche ein größeres spezifisches Gewicht hat, als die Körper, so werden diese auf der Flüssigkeit schwimmen.

Ist das spezifische Gewicht des Körpers und das der Flüssigkeit gleich, so kann der Körper in jedem Orte der Flüssigkeit in Ruhe sein.

Ist das spezifische Gewicht des Körpers größer, als das der Flüssigkeit, so wird der Körper in der Flüssigkeit untersinken.

2) Körper, welche in ihrem natürlichen Zustande spezifisch schwerer sind, als eine gegebene Flüssigkeit, können in ihr zum Schwimmen gebracht werden, und zwar vorzüglich

a) wenn man sie mit andern Körpern verbindet, die spezifisch leichter sind, als jene Flüssigkeit, oder

b) wenn man sie aushöhlt.

a.

Im Falle man einen Körper durch Verbindung mit einem andern (spezifisch leichter n) schwimmend machen will, so darf das absolute Gewicht der verbundenen Körper das der verdrängten Flüssigkeit nicht übertreffen, d. i. man hat (wenn σ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, S und s die spezifi-

schen und P und p die absoluten Gewichte der verbundenen Körper bezeichnen):

$$P + p = \sigma\left(\frac{P}{S} + \frac{p}{s}\right).$$

Das Gewicht des spezifischen leichtern Körpers ist

$$p = \frac{P\,(S - \sigma)}{S\,(\pi - s)}.$$

b.

Das Aushöhlen ist größtentheils als Verbinden mit atmosphorischer Luft zu achten.

* Besondere Formen der ausgehöhlten Körper später.

** (Schwimmen und Untersinken der Fische und Thiere überhaupt. Schwimmkleid. Cartesianischer Taucher. Don. Paolo Moccia. Bau der Schiffe. Fliegen der Vögel. Luftballon...).

II. Sätze und Formeln in Rücksicht der Bewegung der Körper.

Die Geschwindigkeit eines (gleichförmig bewegten) Körpers für eine bestimmte Zeit erhält man, wenn man den Weg durch die Zeit der Bewegung theilt; d. i.

$$c = \frac{S}{t}.$$

1. Zusatz. Der durchlaufene Weg ist gleich dem Produkte aus Zeit und Geschwindigkeit; d. i.

$$S = C\,.\,t.$$

2. Zusatz. Die Zeit ist gleich dem Quotienten aus dem Wege getheilt durch die Geschwindigkeit; d. i.

$$t = \frac{S}{c}.$$

* Von der Bewegung noch einiges in der Lehre von den Proportionen.

BB. Die Grundrechnungsarten in benannten Decimalbrüchen.

§. 87.

Additionsbeispiele.

I. Wie viele Jahre, Monate, Tage, Stunden und Minuten machen 3·40764517 + 1·89756463 + 5·86304765 + 0·7075238 Jahre?

Auflösung.

$$\begin{array}{r} 3{\cdot}40764517 \\ 1{\cdot}89756463 \\ 5{\cdot}86304765 \\ 0{\cdot}70752380 \\ \hline 11{\cdot}87578125 \end{array}$$ Jahre.

$0{\cdot}87578125 \times 12 = 10{\cdot}509375$ Monate,
$0{\cdot}509375 \times 30 = 15{\cdot}28125$ Tage,
$0{\cdot}28125 \times 24 = 6{\cdot}75$ Stunden,
$0{\cdot}75 \times 60 = 45$ Minuten, also

11 Jahre, 10 Monate, 15 Tage, 6 Stunden und 45 Minuten.

II. Ein Reisender macht in 6 Tagen folgende Wege: Am Montag 5·075 Meilen, am Dienstag 4·98357 Meilen, am Mittwoch 5·1356 Meilen, am Donnerstag 6·005 Meilen, am Freitag 4·87 Meilen und am Samstag 5·4 Meilen; wie viele Meilen macht dieses?

Auflösung.

I. 5·075 . .
II. 4·98357
III. 5·1356 .
IV. 6·005 . . .
V. 4·87 . . .
VI. 5·4 . . . .

31·46917 Meilen.

III. Welches ist der Umfang eines Fünfecks, dessen Seiten AB = 4·372′; BC = 7·00349′; CD = 6·498′; DE = 5·13748′ und EA = 8·391′ sind?

Auflösung.

$$AB + BC + CD + DE + EA = x;$$
$$4{\cdot}372 + 7{\cdot}00349 + 6{\cdot}498 + 5{\cdot}13748 + 8{\cdot}391 = x;$$
$$31{\cdot}40197 = x;\ \text{also}$$
$$AB + BC + CD + DE + EA = 31{\cdot}4'.$$

IV. Welches ist der Flächeninhalt eines Landes, das folgende Kreise hat, den Kreis A = 21·7139 □M.; den Kreis B = 13·6674 □M.; den Kreis C = 14·35 □M.; den Kreis D = 13·2148 □M. und den Kreis E = 8·04 □M.?

Auflösung.

I. A = 21·7139 □ Meilen,
II. + B = + 13·6674 „ „
III. + C = + 14·3500 „ „
IV. + D = + 13·2148 „ „
V. + E = + 8·0400 „ „

A + B + C + D + E = 70·9861 □ Meilen.

V. Wie viele Schäffel geben 6·76349 Metzen; 8·4758 Metzen, 5·68437 Metzen, 9·15634 Metzen und 7·42 Metzen?

Auflösung.

6·76349
8·4758.
5·68437
9·15634
7·42...

37·50000 Metzen;

$$37\frac{1}{2} : 6 = \frac{75}{2.6} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4} \text{ alſo}$$

6 Schäffel $1\frac{1}{2}$ Metzen.

VI. Jemand besitzt 5·653074 + 9·3847 + 13·400226 + 17·187 fl.; wie viel Gulden und Kreuzer macht dieses?

Auflösung.

5·653074
9·3847..
13·400226
17·187...

45·625000

$$45\cdot625 = 45\frac{5}{8}; \text{ alſo}$$

45 fl. $37\frac{1}{2}$ kr.

§. 88.

Subtractionsbeiſpiele.

I. Wenn die ſideriſche Umlaufszeit der Venus 224·700787 Tage, die der Erde 365·256383 Tage beträgt; um wie viel beträgt letztere mehr als erſtere?

Auflösung.

365·256383 — 224·700787 = x;
140·555596 = x; also
140·555596 Tage.

II. Um wie viele Millimeters ist die bayer. Elle länger, als die große Augsburger, wenn erstere 833·011 und letztere = 606·367 Millimeters ist?

Auflösung.

833·011 — 606·367 = 226·644 = x.

III. Um wie viel Quadratmeilen ist das Königreich Bayern größer, als das Königreich der Niederlande, wenn ersteres (wie Hoffmann angibt) = 1389 □Meilen und letzteres = 1187·63 □Meilen ist?

Auflösung.

1389 — 1187·63 = 1389·00 — 1187·63 = x;
201·37 □Meilen = x.

IV. Die bayerische Maaß hält 10·6903 Decalitres, die Wiener Maaß hält 14·15015 Decalitres; um wie viel ist erstere kleiner als letztere?

Auflösung.

14·15015 — 10·69030 = x;
3·45985 Decalitres = x.

V. Der bayerische Metzen hält 370·597 Decalitres, der Nürnberger Metzen hält 199·4112 Decalitres; um wie viel ist ersterer größer als letzterer?

Auflösung.

370·5970 — 199·4112 = 171·1858 = x.

VI. Das Frankfurter ℔. Zentnergewicht wiegt 509·391 Milligrammes, das bayer. ℔. 560·0 Milligrammes; um wie viel ist ersteres geringer als letzteres?

Auflösung.

560·000 — 509·391 = 50·609 = x.

VII. A besitzt 15·234 fl., B 9·359 fl.; wie viel hat A mehr als B?

Auflösung.

$$15 \cdot 234 - 9 \cdot 359 = 5 \cdot 875 = 5\frac{7}{8}; \text{ also}$$

5 fl. $52\frac{1}{2}$ kr.

VIII. Wenn der bayer. Conv. Speciesthaler = 1·33333 ... Conv. Couranttthaler und der bayer. Kronenthaler = 1·45220 Conv. Couranttthaler ist; um wie viel ist der Werth des letzten größer als der des ersten?

Auflösung.

$$1 \cdot 45220 - 1 \cdot 33333 = 0 \cdot 11887 = x.$$

§. 89.

Multiplicationsbeispiele.

I. Welches ist die mittlere siderische Umlaufszeit des Saturn, wenn sie 29·456738 mal so groß ist, als die der Erde und letztere 365 Tage, 6 Stunden, 9 Minuten und 10·75 Sekunden beträgt?

Auflösung.

365 Tg., 6 St., 9′ 10·75″ × 29·456738 = x;
8766 St., 9′ 10·75″ × 29·456738 = x;
525969′ 10·75″ × 29·456738 = x;
31558150·75 × 29·456738 = 929600178·4072535 ...″;
929600178·407 ... : 60 = 15493336′ 32·22;
15493336′ : 60 = 258222 St. 16′;
258222″ : 24 = 10759 Tg., 6 St.; also
x = 10759 Tag, 6 St., 16′ 30·678756″, oder
29 Jahre, 154 Tage, 6 St., 16′ 30·678756″.

II. Der Durchmesser des Guldenstücks ist nach dem süddeutschen Zollverein = 30 Mill. = 0·1007849 bayer. Fuß; wie groß ist der Umfang desselben?

Auflösung.

$$p = d \times \pi.$$
$$= 0 \cdot 1007849 \times 3 \cdot 1415926 \ldots$$
$$= 0 \cdot 316615 \ldots \text{ bayer. Fuß.}$$

II. Angenommen, der Mond sey eine Kugel, deren Radius = 240 Meilen; welches ist die Länge seiner Peripherie?

Auflösung.

$p = 2 . r . \pi;$
$= 2 \times 240 \times 3{\cdot}1415926 \ldots$
$= 480 \times 3{\cdot}1415926 \ldots$
$= 1507{\cdot}964448 \ldots$

IV. Welches ist die Länge der Erdbahn, wenn die mittlere Geschwindigkeit der Erde 4·205 M. ist, und die siderische Umlaufszeit der Erde um die Sonne 365 Tag, 6 St., 9′ 11″ beträgt?

Auflösung.

$s = c \times t;$
$= 4{\cdot}205 \times$ 365 Tag, 6 St. 9′ 11″;
$= 4{\cdot}205 \times 31558151'';$
$= 132'702{,}024{\cdot}955$ Meilen.

V. Angenommen, unser Erdkörper sey eine Kugel, deren Radius = 859·436... Meilen ist; wie groß ist die Oberfläche dieser Kugel?

Auflösung.

$\text{supf.} = 4 \times r . r \times \pi,$
$= 4 \times 859{\cdot}436 \times 859{\cdot}436 \times 3{\cdot}1415926 \ldots$
$= 3437{\cdot}744 \times 859{\cdot}436 \times 3{\cdot}1415926 \ldots$
$= 2954520{\cdot}952384 \times 3{\cdot}1415926 \ldots$
$= 9281893{\cdot}47880005056$ □Meilen.

VI. Welches ist die Oberfläche einer Walze, deren Höhe = 3·4582′ ist, und welche begränzt ist von zwei Kreisflächen, deren Durchmesser 1·23′ ist?

Auflösung.

$$\text{ar. cyl.} = 2 . r . \pi (r + h) = d . \pi . \left(\frac{d}{2} + h\right).$$

$$= (1{\cdot}23 \times 3{\cdot}14159 \times 3{\cdot}4582) + \left(\frac{1{\cdot}23 \times 123}{2} \times \pi\right);$$
$$= (3{\cdot}8641 \ldots \times 3{\cdot}4582) + (0{\cdot}615 \times 1{\cdot}23 \times 3{\cdot}1416);$$
$$= 13{\cdot}36283062 + 2{\cdot}376463 \ldots$$
$$= 15{\cdot}73929394 \ldots$$

VII. Welches ist der kubische Inhalt eines Kegels, dessen Höhe = 160·5′, und welcher eine Basis hat, deren Durchmesser = 11·9′.

Auflösung.

$$\text{con.} = \frac{a \,.\, b}{3};$$

$$= \frac{160{\cdot}5 \times 11{\cdot}9 \,.\, 11{\cdot}9 \times 3{\cdot}14159}{3 \times 4};$$

$$= \frac{160\ 5 \times 141{\cdot}61 \times 3{\cdot}14159}{3 \times 4};$$

$$= (53{\cdot}5 \times 141{\cdot}61 \times 3{\cdot}14159) : 4 = (7576{\cdot}135 \times 3{\cdot}14159) : 4;$$

$$= (23801{\cdot}185716 \ldots) : 4 = 5950{\cdot}296429 \ldots$$

VIII. Ein rundes, einen abgekürzten Kegel bildendes Gefäß hat innen an der Basis einen Durchmesser = 3·5″, oben = 3·25″ und eine Höhe von 3·75″ Duodec.; welches ist der kubische Inhalt dieses Gefäßes?

Auflösung.

$$\text{con. tr.} = \frac{\pi \,.\, a}{3} = [(R \,.\, R) + (r \,.\, r) + (R \,.\, r)];$$

$$= \frac{3{\cdot}14159 \times 3{\cdot}75}{3} [(1{\cdot}75 \times 1{\cdot}75) + 1{\cdot}62 \times 1{\cdot}62) + (175 \times 162)];$$

$$= 3{\cdot}14159 \times 1{\cdot}25 \times (3{\cdot}0625 + 2{\cdot}6244 + 2{\cdot}835);$$

$$= 3{\cdot}9269875 \ldots \times 8{\cdot}5219;$$

$= 33{\cdot}458 \ldots$ c″ Duodecimalm.

IX. Wie viele Eimer und Maaß hält ein Faß, welches 3·75′ lang ist, und in welchem die Spundtiefe = 3·5′, und die Durchmesser der Boden = 2·8″?

Auflösung.

$$= \frac{l \,.\, \pi}{3} \times (R \,.\, R + r \,.\, r + R \,.\, r); \text{ oder}$$

$$= \frac{L \,.\, \pi}{12} \times [(D \,.\, D) + (d \,.\, d) + (D \,.\, d)];$$

$$= \frac{3{\cdot}75 \,.\, 3{\cdot}1415}{3 \times 4} \,.\, [(3{\cdot}5 \,.\, 3{\cdot}5) + (2{\cdot}8 \,.\, 2{\cdot}8) + (3{\cdot}5 \,.\, 2{\cdot}8)];$$

$$= \frac{1{\cdot}25 \times 3{\cdot}14159}{4} (12{\cdot}25 + 7{\cdot}84 + 9{\cdot}80);$$

$$\frac{3{\cdot}9269875 \times 29{\cdot}89}{4} = 29{\cdot}344414093750 c' = 29344{\cdot}414094 .. c'';$$

= 11 Eimer 22·42824 Maaß.

X. Welches ist der Kubikinhalt unserer Erde, wenn sie

als eine Kugel betrachtet wird, deren Durchmesser = 1718·873.. Meilen ist?

Auflösung.

$$\text{sph.} = \frac{4 . r . r . r . \pi}{3} = \frac{\text{supf.} \times r}{3} = \frac{\text{supf.} \times d}{6};$$

$$\frac{9281893·4788 \times 1718·873}{6} = 9281893·4788 \times 286·468;$$

$$= 2658965461·084878 \text{ c Meilen.}$$

XI. Was wiegt der Kubikfuß Blei, wenn das spezifische Gewicht desselben = 11·3525, und der Kubikfuß Regenwasser 44·17 ℔. wiegt?

Auflösung.

rp. = s. v;

= 11·3525 × 44·17 = 501·439925; also

5 Ztr. 1 ℔. 13·078 Loth.

XII. Wie viele Ztr. und ℔. wiegt eine bleierne Röhre, deren Peripherie = 1·8″ × π Decim.,, und deren Durchmesser innen 1·5″ beträgt und durch welche 8450·5′ Weges Wasser läuft, wenn der Kubikzoll Blei Decim. zu 0·00501439... Ztr. angenommen wird?

Auflösung.

Die Röhre ist als eine hohle Walze zu betrachten, d. i.

Röhre = (R . R . π . a) — (r . r . π . a);

= [(R . R) — (r . r)] × π . a;

Das Gewicht der Röhre = rp· von 1 c″ Blei in die Röhre = x; d. i.

x = rp × [(R . R) — (r . r)] × π × a;

= 0·00501439 × [(0·9 × 0·9) — (0·75 × 0·75)] × 3·1415926... × 8450·5′;

= 0·00501439 × (0·81 — 0·5625) × 3·1415926 × 84505″;

= 0·00501439 × 0·2475 × 3·14159 × 84505;

= 0·00501439 × 0·7775... × 84505;

= 0·00389861825... × 84505 = 329·451193 Ztr. oder

= 329 Ztr. 45′1193 ℔.

XIII. Wie viele Gulden kosten 32945·1193 ℔. Blei, wenn 1 ℔. 0·25 fl. kostet?

Auflösung.

$$x = 32945{\cdot}1193 \times 0{\cdot}25;$$
$$= 8236{\cdot}278825 \text{ fl.}$$

XIV. Ein Floß ist aus Bohlen von Tannenholz zusammengefügt. Seine Länge beträgt 35′; die Breite 18′ und die Dicke 1′. Mit wie viel Zentnern ist dieses Fahrzeug zu beladen, wenn es nur $\frac{2}{3}$′ tief im Wasser sein soll?

Auflösung.

Zuerst ist zu berechnen das Gewicht des Floßes. Dieses ist, da das spezif. Gewicht des Tannenholzes = 0·55, das Volumen des Floßes = 35 × 18 × 1 = 630 c′, und 1 c′ Wasser = 44·17 Pfd. ist, nach

$$P = S \,.\, V.$$
$$= 0{\cdot}55 \times 630 \times 44{\cdot}17 = 15304{\cdot}905 \text{ ℔.}$$

Das Gewicht des verdrängten Wassers ist 18551·4 ℔. Es kann also das Fahrzeug mit 18551·4 — 15304·905 = 3246·495 ℔. = 32 Ztr. + 46·495 ℔. beladen werden.

XV. Der Durchmesser eines kreisförmigen Gartens beträgt 54·75′; welches ist der Flächeninhalt dieses Gartens?

Auflösung.

$$\text{Crc.} = \frac{d \,.\, d \,.\, \pi}{4} = r \,.\, r \,.\, \pi.$$

$$= 54{\cdot}75 \times 54{\cdot}75 \times 3{\cdot}1416 \times \frac{1}{4} = 2497{\cdot}0625 \times 0{\cdot}7854;$$

$$= 1963{\cdot}1928875.$$

XVI. Ein einen kreisförmigen Garten einschließender mit Wasser gefüllter Graben ist 12′ breit; der Durchmesser des Gartens beträgt 46′. Welchen Flächeninhalt nimmt das Niveau des Grabens ein?

Auflösung.

Der Graben ist anzusehen als ein Ring, in welchem $R = \frac{46}{2} + 12 = 35$, und $r = 23$ ist.

$$\text{Anl. ar.} = \pi \,.\, (R + r) \times (R - r);$$
$$= 3{\cdot}1416 \times (35+23) \,.\, (35-23) = 3{\cdot}1416 \times 58 \times 12;$$
$$= 3{\cdot}1416 \times 696 = 2186{\cdot}5536.$$

§. 90.

Divisionsbeispiele mit benannten Zahlen.

I. In welcher Zeit wird ein Dampfwagen $8\frac{3}{4}$ geograph. Meilen mit 72·1872′ Geschwindigkeit durchlaufen?

Auflösung.

$$t = \frac{S}{c};$$

$$= \frac{8\frac{3}{4} \times 25380{\cdot}076'}{72{\cdot}1872};$$

$$\frac{8{\cdot}75 \times 25380{\cdot}076}{72{\cdot}1872} = \frac{875 \times 2538007{\cdot}6}{721872};$$

$$\frac{7000 \times 317250{\cdot}95}{721872} = \frac{2220756650{\cdot}00}{721872};$$

$$= 3075'';$$

$$= 3075 : 60;$$

$$= 51'\ 15''.$$

II. Wie viele Tage braucht die Venus, bis sie ihre Bahn durchläuft mit der mittleren Geschwindigkeit von 4·95 Meilen, wenn die Bahn 96199032·58416 Meilen lang ist?

Auflösung.

$$t = \frac{s}{c};$$

$$= \frac{96199032{\cdot}58416}{4{\cdot}95};$$

$$\frac{9619903258{\cdot}416}{495} = 19434147{\cdot}9968''; \text{ oder}$$

19434147·9968 : 86400 = 224·700787 Tage.

III. Welche Geschwindigkeit hat eine Brieftaube, wenn sie 15 Meilen in 1 Stunde zurücklegt?

Auflösung.

$$c = \frac{s}{t};$$

$$= \frac{15 \times 25380{\cdot}076}{60 \times 60} = \frac{25380{\cdot}076}{4.60};$$

$$= \frac{6345{\cdot}019}{60} = \frac{1057{\cdot}50314\ldots}{10};$$

$$= 105{\cdot}750314\ldots$$

IV. Angenommen, unsere Erde sey eine Kugel, deren größter Kreis gleich ist 5400 Meilen; wie lang ist ihr Durchmesser?

Auflösung.

$$d = \frac{p}{\pi};$$

$$= \frac{5400}{3{\cdot}1415926\ldots};$$

$$\frac{5400 \times 10000000}{31415926} = 54000000000 : 31415926;$$

$$= 1718{\cdot}8734178\ldots$$

V. Welches ist die Oberfläche der Sonne, wenn sie, als eine Kugel betrachtet, einen 111·74 mal größeren Durchmesser als unsere Erde hat, und wenn ihr kubischer Inhalt 1395324·4 mal mehr beträgt, als der Kubikinhalt unserer Erde.

Auflösung.

$$\text{supf.} = \frac{3}{r} \times \text{sph.}$$

$$= \frac{3 \times 1395324{\cdot}4 \times 2658965461{\cdot}08\ldots}{859{\cdot}4367089 \times 111{\cdot}74\ldots};$$

$$= \frac{1395324{\cdot}4 \times 2658965461{\cdot}084878}{286{\cdot}478902967 \times 111{\cdot}74};$$

$$= \frac{13953244 \times 2658965461084878}{2864789029{\cdot}67 \times 111{\cdot}74};$$

$$= \frac{124872{\cdot}415 \times 2658965461084878}{2864789029{\cdot}67};$$

$$= 124872{\cdot}415 \times 928154{\cdot}0223;$$

$$= 115929834265{\cdot}5648545\ldots \square \text{Meilen.}$$

VI. Wie tief muß ein Wasserbehälter sein, der bei einer Länge von 5·8′ und bei einer Breite von 4·5 genau 91·350 c′ Wasser fassen soll?

Auflösung.

$$91{\cdot}350 : (4{\cdot}5 \times 5{\cdot}8) = x;$$

$$91{\cdot}350 : 26{\cdot}100 = \frac{91{\cdot}350}{26{\cdot}100};$$

$$3{\cdot}5' = x.$$

VII. Welchen kubischen Inhalt hat ein messingner Cylinder, welcher 9 Ztr. 84·5493 ℔. wiegt, wenn das spezifische Gewicht des Messings = 8·916 ist?

Auflösung.

$984·5493 : (8·916 \times 44·17) = x;$

$984·54930 : 393·81972 = 2·5\ c' = x.$

VIII. An einem Wagen ist der Durchmesser der Vorderräder = 3·4′, der der Hinterräder = 3·8′; wie oft müssen sich die Vorderräder, wie oft die Hinterräder um ihre Achse drehen, bis der Wagen von M nach R kommt, welche Orte 15·2 Meilen von einander entfernt liegen?

Auflösung.

Vorderräder.

$(15·2 \times 25380·076) : (3·4 \times 3·1416) = x;$

$385777·15520 : 10·68144 = 36116·58 = x.$

Hinterräder.

$(15·2 \times 25380·076) : (3·8 \times 3·1416) = y;$

$(4 \times 25380·076) : 3·1416 = 4 \times 8397·111 \ldots$

$33588·444 = y.$

IX. Es soll ein Körper von gegossenem Eisen in Verbindung mit Kork schwimmend gemacht werden; wie viel ℔. Kork sind zu nehmen, wenn der eiserne Körper 25·5 ℔. wiegt?

Auflösung.

Es sei in der Formel $p = x$, $P = 25·5$, $s = 0·24$, $S = 7·204$, $\sigma = 1$

$$p = \frac{P\,.\,(S - \sigma)\,s}{S\,.\,(\sigma - s)}$$

$$x = \frac{25·5\,.\,(7·204 - 1)\,.\,0·24}{7·204\,.\,(1 - 0·24)};$$

$$= \frac{25·50 \times 6·204}{7·204 \times 0·76} = \frac{255 \times 62040}{7204 \times 76} = 28·8 \ldots \text{℔.}$$

II. Abtheilung.

Von den Sexagesimalbrüchen.

§. 91.

Erklärungen.

1) **Sexagesimalbrüche** oder sechzigtheilige Brüche sind jene Brüche, welche die Zahl Sechzig (= 60), oder ein solches Produkt, zu dem Sechzig mehrmal als Factor ge-

nommen ist (eine Würde von Sechzig), zum Nenner haben. Z. B.

$$\frac{1}{60};\ \frac{7}{60 \times 60} = \frac{7}{3600};\ \frac{11}{60 \times 60 \times 60} = \frac{11}{216000}\ \text{rc.}$$

2) Die Sexagesimalbrüche sind ähnlicher Art, wie die Decimalbrüche, und werden auch (als Sexagesimalen) auf eine ähnliche Art, wie die Decimalen, behandelt. Auch sie werden z. B. ohne Nenner angeschrieben, indem man blos setzt:

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{60^1} = 1 \times 60^{-1} = 1^{-1};$$

$$\frac{7}{60 \times 60} = \frac{7}{60^2} = 7 \times 60^{-2} = 7^{-2};$$

$$\frac{11}{60 \times 60 \times 60} = \frac{11}{60^3} = 11 \times 60^{-3} = 11^{-3}.$$

3) Die Sexagesimalen haben ihren vorzüglichen Nutzen nur bei Berechnung

a) der Zeit, und

b) eines Kreisbogens.

Es ist (§. 26 und §. 27.)

a.

$$1^h = 60' = 3600'' = 216000''', \text{ daher}$$

$$1''' = \frac{1^h}{216000} = \frac{1^h}{60^3} = 60^{-3},$$

$$1'' = \frac{1^h}{3600} = \frac{1^h}{60^2} = 60^{-2},$$

$$1' = \frac{1}{60} = \frac{1}{60^1} = 60^{-1}; \text{ und}$$

b.

$$1^\circ = 60' = 3600'' = 216000''', \text{ daher}$$

$$1''' = \frac{1^\circ}{216000} = \frac{1^\circ}{60^3} = 60^{-3};$$

$$1'' = \frac{1^\circ}{3600} = \frac{1^\circ}{60^2} = 60^{-2};$$

$$1' = \frac{1^\circ}{60} = \frac{1^\circ}{60^1} = 60^{-1}.$$

Da man die Sexagesimalen ganz wie gemeine Brüche behan-

deln kann und sie nur bei chronologischen und astronomischen Berechnungen mit Vortheil benützt werden, so wird eine beliebige weitere Exposition dieser hier dem mündlichen Vortrag überlassen.

III. Abtheilung.

Von den Kettenbrüchen.

§. 92.

Erklärungen.

1) Kettenbrüche (§. 49. 5) sind Brüche, deren Nenner aus zwei Theilen besteht, von welchen der eine Theil eine ganze Zahl, der andere aber ein Bruch ist, dessen Nenner, wenn er nicht der letzte ist, wieder aus zwei Theilen besteht.... Z. B.

I.

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{7}}}}}.$$

II.

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{9+\dots}}}}}}}$$

III.

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}}}}$$

Die einzelnen Brüche ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ ...), durch deren Verbindung der Kettenbruch gebildet wird, heißen **Glieder** des Kettenbruches.

Ein Kettenbruch mit einer begränzten Anzahl von Gliedern heißt ein **endlicher**; I. Beisp. ist z. B. ein endlicher Kettenbruch. Ein Kettenbruch mit einer unbegränzten Anzahl von Gliedern heißt ein **unendlicher**; z. B. II. und III. Beispiel sind unendliche Kettenbrüche. Die unendlichen Kettenbrüche sind gewöhnlich **periodische**, d. i. solche, in welchen eine bestimmte Anzahl von gleichen Gliedern immer in derselben Ordnung wiederkehrt, wie z. B. im III. Beisp., wo $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}$ immer wiederkehren.

2) Die Kettenbrüche dienen dazu, für nicht vereinfachbare Brüche, deren Zähler und Nenner große Zahlen sind, andere Brüche in kleinern Zahlen zu finden, welche jenen so nahe als möglich kommen.

Man verwandelt nämlich die Brüche von großen Zahlen in Kettenbrüche und nimmt von diesen nur die ersten Glieder, welche reducirt den möglichst nahen Näherungswerth (reducirten Werth der Kettenbrüche oder Partialbrüche) geben.

§. 93.

Aufgabe.

Einen nicht vereinfachbaren Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung.

1) Man theile (§. 48) den Zähler und den Nenner des Bruches durch den Zähler des Bruches. — Dadurch erhält man einen zusammengesetzten Bruch, dessen Zähler gleich Eins (= 1) und dessen Nenner eine gemischte Zahl, d. i. eine ganze Zahl mit einem Bruche ist.

2) Diesen letzten Bruch dividire man wieder, wenn sein Zähler nicht schon Eins (= 1) ist, wie den zuerst zu verwandelnden Bruch, und es wird der obige Fall eintreten.

3) Auf diese Weise fahre man fort (wenn man den Bruch ganz in eine Kette auflösen will), bis einmal der Zähler einer gemischten Zahl (welche dann der letzte Nenner wird) gleich Eins ist.

Beispiele.

I. Man verwandle $\frac{134}{303}$ in einen einfachen Kettenbruch.

Auflösung.

$$\frac{134:134}{303:134} = \frac{1}{\left(2+\frac{35}{134}\right)};$$

$$\frac{1}{\left(2+\frac{35:35}{134:35}\right)} = \frac{1}{2+\frac{1}{\left(3+\frac{29}{35}\right)}};$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{\left(3+\frac{29:29}{35:29}\right)}} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{\left(1+\frac{6}{29}\right)}}};$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\left(1+\frac{6:6}{29:6}\right)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{\left(4+\frac{5}{6}\right)};$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{\left(4+\frac{5:5}{6:5}\right)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{5}\right)}; \text{ also}$$

$$\frac{134}{303} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}.$$

II. Man verwandle 3·14159 in einen Kettenbruch.

Auflösung.

$$3{\cdot}14159 = 3+\frac{14159}{100000};$$

$$3+\frac{14159:14159}{100000:14159} = 3+\frac{1}{\left(7+\frac{887}{14159}\right)};$$

$$3+\frac{1}{\left(7+\frac{887:887}{14159:887}\right)} = 3+\frac{1}{7}+\frac{1}{\left(15+\frac{854}{887}\right)};$$

$$3+\frac{1}{7}+\frac{1}{\left(15+\frac{854:854}{887:854}\right)} = 3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{\left(1+\frac{33}{854}\right)};$$

$$3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{\left(1+\frac{33:33}{854:33}\right)} = 3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{\left(25+\frac{29}{33}\right)};$$

$$3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{\left(25+\frac{29:29}{33:29}\right)} = 3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{25}+\frac{1}{\left(1+\frac{4}{29}\right)};$$

$$3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{25}+\frac{1}{\left(1+\frac{4:4}{29:4}\right)} = 3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{25}+\frac{1}{1}+\frac{1}{\left(7+\frac{1}{4}\right)}; \text{ also}$$

$$3\cdot14159 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}}}}}}}.$$

§. 94.

Aufgabe.

Einen Kettenbruch in einen gemeinen Bruch zu reduciren.

Auflösung.

Der Kettenbruch ist ein irregulärer oder zusammengesetzter Bruch (§. 49. 4). Bei der Reducirung eines Kettenbruchs in einen gemeinen Bruch befolge man vom letzten Gliede der Kette angefangen bis zum ersten die §. 62 gegebenen Regeln.

Beispiele.

I. Es soll $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}}}$ reducirt werden.

Auflösung.

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\left(\frac{6}{5}\right)}}}}}$$

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{5}{6}}}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\left(\frac{29}{6}\right)}}}}$$

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{6}{29}}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\left(\frac{35}{29}\right)}}}$$

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{29}{35}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\left(\frac{134}{35}\right)}}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{25}{134}=\frac{1}{\left(\frac{303}{134}\right)};\text{ alſo}$$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}=\frac{134}{303}.$$

III. Es ſoll $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}}}}$ reducirt werden in einen gemeinen Bruch.

Aufloͤſung.

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{29}{4}\right)}}}}}};$$

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{29}}}}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{\left(\frac{33}{29}\right)}}}}};$$

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{29}{33}}}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{854}{33}\right)}}}};$$

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{33}{854}}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{\left(\frac{887}{854}\right)}}};$$

$$+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{874}{887}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\left(\frac{14159}{887}\right)}};$$

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{887}{14159}}=3+\cfrac{1}{\left(\frac{100000}{14159}\right)};$$

$$3+\frac{14159}{100000}=3+0{\cdot}14159;\text{ alſo}$$

$$3{\cdot}14159=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}}}}$$

§. 95.

Aufgabe.

Den Näherungswerth eines Kettenbruches zu finden.

Auflösung.

Den Näherungswerth eines Kettenbruches findet man, wenn man das erste Glied, oder die zwei, drei ... n ersten Glieder (mit Vernachläßigung aller folgenden Glieder) der Kette nimmt, indem man bei der ganzen Zahl des nten zusammengesetzten Nenners abbricht, und diesen Theil der Kette nach §. 94 auf einen gemeinen Bruch bringt.

Beispiele.

Man suche von $3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{25}+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{4}$ den Näherungswerth, indem man von der Kette nimmt

I. das erste Glied,

II. die zwei ersten Glieder,

III. die drei „ „

IV. die vier „ „

Auflösung.

I. Näherungswerth, indem man das erste Glied nimmt.

$$3+\frac{1}{7}=x;$$

$$3\frac{1}{7}=x.$$

II. Näherungswerth, indem man die zwei ersten Glieder nimmt.

$$3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}=3+\frac{1}{\left(\frac{106}{15}\right)};$$

$$3+\frac{15}{106}=x.$$

III. Näherungswerth, indem man die drei ersten Glieder nimmt.

$$3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}=3+\frac{1}{7}+\frac{1}{\left(\frac{16}{1}\right)};$$

$$3+\frac{1}{7}+\frac{1}{16} = 3+\frac{1}{\left(\frac{113}{16}\right)};$$

$$3+\frac{16}{113} = x.$$

IV. Näherungswerth, indem man die vier ersten Glieder nimmt.

$$3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{25} = 3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{\left(\frac{26}{25}\right)};$$

$$3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{15}{26} = 3+\frac{1}{7}+\frac{1}{\left(\frac{415}{26}\right)};$$

$$3+\frac{1}{7}+\frac{26}{415} = 3+\frac{1}{\left(\frac{2931}{415}\right)};$$

$$3+\frac{415}{2931} = x.$$

§. 96.

Sätze.

1) Wenn von der Kette eine ungerade (§. 45. 5) Anzahl von Gliedern genommen wird, so wird der Näherungswerth größer, als der wahre Werth des Kettenbruches; wenn eine gerade Anzahl von Gliedern genommen wird, so wird der Näherungswerth kleiner, als der wahre Werth des Kettenbruches.

2) Je mehr Glieder genommen werden zum Näherungswerth, um so kleiner wird der Unterschied zwischen diesem und dem wahren Werthe des Kettenbruches. Werden alle Glieder genommen, so wird der Unterschied = 0.

3) Ist der gegebene Kettenbruch aus einem unendlichen Decimalbruche (ein unendlicher), so kann der wahre Werth desselben nie vollständig erhalten werden.

Beweis.

I. In §. 95. I.) ist von der Kette keine gerade Anzahl von Gliedern genommen.

$$3 + \frac{1}{7} = 3{\cdot}14285\ldots$$

$$3{\cdot}14285\ldots > 3{\cdot}14159.$$

II. In (§. 95 II.) sind von der Kette zwei Glieder (eine gerade Anzahl von Gliedern) genommen.

$$3 + \frac{15}{106} = 3{\cdot}1415094339\ldots$$

$$3{\cdot}141509\ldots < 3{\cdot}14159.$$

Der Unterschied zwischen 3·14159 und 3·14289 ist 0·00126 ; der zwischen 3·14159 und 3·141509... ist 0·00008, also

$$0{\cdot}00126 > 0{\cdot}00008.$$

III. In (§. 95. III.) sind von der Kette drei Glieder (eine ungerade Anzahl von Gliedern) genommen.

$$3 + \frac{16}{113} = 3{\cdot}14159292035\ldots$$

$$3{\cdot}1415929\ldots > 3{\cdot}14159.$$

Der Unterschied zwischen 31·4159 und 3·14159292035... ist gleich 0·00000292035..., also

$$0{\cdot}00008\ldots > 0{\cdot}00000292035\ldots$$

IV. In (§. 95. IV.) ist von der Kette eine große Anzahl (vier) Glieder genommen.

$$3 + \frac{415}{2931} = 3\,14158990105\ldots$$

$$3{\cdot}1415899\ldots < 3{\cdot}14159.$$

Der Unterschied zwischen 3·14159 und 3·1416899... ist gleich 0·0000000..., also

$$0{\cdot}0000029\ldots > 0{\cdot}00000009894\ldots$$

Anhang.

Einiges von der Potenzenlehre.

A. Von den Potenzen unbenannter Zahlen.

I. Abschnitt.

Vom Podenziren und Radiziren überhaupt.

§. 97.

Erklärungen.

1) Das Multipliciren (§. 8) mit gleichen Faktoren heißt Potenziren.

Jene Größe, welche als Faktor zum Potenziren gesetzt ist, heißt Dignand, Wurzel. Wenn die Aufgabe, daß potenzirt werden soll, angegeben wird, so schreibt man gewöhnlich den Dignand nur einmal an und setzt über ihn (der Kürze wegen) zur Rechten eine Größe, welche anzeigt, wie oft mal der Dignand als Faktor zu gebrauchen sei, und diese Größe wird Exponent genannt. Die Größe aber, welche das Produkt des Potenzirens ist, heißt Potens Würde (potentia, dignitas). Den Exponent, welcher die Anzahl der nöthigen Multiplikationen zur Erhaltung der bestimmten Potens anzeigt, gibt der Potens den näher bezeichnenden Namen. Z. B. $3 . 3 = 3^2 = 9$ heißt: 3 mit dem Exponenten 2 potenzirt ist gleich der Potens 9.

2) Die Operation, mittelst welcher man, wenn der Exponent und die Potens gegeben sind, die Wurzel (den Dignand) findet, heißt Radiziren.

Die Aufgabe, daß eine gegebene Größe radizirt werden soll, wird angegeben durch das Zeichen $\surd$ (=r), welches der zu radizirenden Größe, dem Radikand vorgesetzt wird mit einem Zeichen, Radikator genannt, welcher die nähere Bestimmung der Wurzel angibt und über das Zeichen $\surd$ zu

zeichnen ist. Z. B. $\sqrt[3]{64} = 4$ heißt: Der Radikand 64 mit dem Radikator 3 radizirt ist gleich der Wurzel 4 (welche 3 mal als Faktor gesetzt 64 zum Produkt gibt).

§. 98.

Sätze.

1) Es wird ein Produkt

a) potenzirt, wenn man jeden Faktor potenzirt und die erhaltenen Potenzen miteinander multiplicirt; z. B.

$$15^2 = 5^2 . 3^2; \text{ denn}$$

$$15 . 15 = 5 . 5 \times 3 . 3 = 225;$$

$$42^3 = 7^3 . 3^3 . 2^3; \text{ denn}$$

$$42 . 42 . 42 = 7 . 7 . 7 \times 3 . 3 . 3 \times 2 . 2 . 2 = 74088;$$

b) radizirt, wenn man jeden Faktor radizirt und die erhaltene Wurzel miteinander multiplizirt; z. B.

$$\sqrt[2]{36} = \sqrt[2]{9} . \sqrt[2]{4}; \ \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{27} . \sqrt[3]{8}.$$

Zusatz. Es ist

a) $4^3 . 5^3 = (4 . 5)^3 = 20^3 = 8000$, und

b) $\sqrt[3]{125} . \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{(125 . 64)} = \sqrt[3]{8000}$.

2) Es wird ein Quotient (ein Bruch)

a) potenzirt, wenn man den Dividend und den Divisor potenzirt, und die erste Potenz durch die zweite dividirt; z. B.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{3 . 3}{5 . 5}; \ \left(\frac{7}{11}\right)^3 = \frac{7^3}{11^3} = \frac{7 . 7 . 7}{11 . 11 . 11};$$

b) radizirt, wenn man aus dem Dividende und aus dem Divisor die Wurzel auszieht, und die erste Wurzel durch die zweite dividirt; z. B.

$$\sqrt[2]{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt[2]{4}}{\sqrt[2]{9}}; \ \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}.$$

Zusatz. Es ist

a) $\frac{5^3}{7^3} = \left(\frac{5}{7}\right)^3; \ \frac{7^4}{13^4} = \left(\frac{7}{13}\right)^4 \ldots$

b) $\frac{\sqrt[2]{16}}{\sqrt[2]{25}} = \sqrt[2]{\left(\frac{16}{25}\right)}; \ \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \sqrt[3]{\left(\frac{8}{125}\right)} \ldots$

II. Abschnitt.

Vom Potenziren und Radiziren im Besonderen.

I. Artikel.

Vom Quadrate und vom Kubus.

§. 99.

Erklärungen und Sätze.

1) Die Potenzen mit dem Exponenten 2 (die Potenzen des zweiten Grades) heißen Quadrate; eine Potenz mit dem Exponenten 3 (eine Potenz des dritten Grades), heißt Kubus.

• Die Namen Quadrat und Kubus sind der Geometrie entnommen.

Die Operation, durch welche man das Quadrat bildet, heißt Quadriren, zum Quadrat erheben; jene, durch welche man den Kubus erhält, heißt Kubiren, zum Kubus erheben.

Eine Zahl wird zum Quadrat erhoben (quadrirt), wenn man sie zweimal als Faktor setzt und mutiplizirt. Eine Zahl wird zum Kubus erhoben (kubirt), wenn man sie dreimal als Faktor setzt und multiplicirt.

• Man hüte sich einen Ausdruck wie $4^2 = 16$ mit $4 . 2 = 8$; oder $8^3 = 512$ mit $8 . 3 = 24$ zu verwechseln.

2) Es sind für die Zahlen von 1 bis 10

a) die Quadrate

1^2;	2^2;	3^2;	4^2;	5^2;	6^2;	7^2;	8^2;	9^2;	10^2;
1;	4;	9;	16;	25;	36;	49;	64;	81;	100;

b) die Kubusse

1^3;	2^3;	3^3;	4^3;	5^3;	6^3;	7^3;	8^3;	9^3;	10^3;
1;	8;	27;	64;	125;	216;	343;	512;	729;	1000.

Aus diesen zwei Täfelchen ist zu ersehen, daß in einer Reihe von Zahlen, in welcher der Unterschied der nacheinander stehenden Größen gleich ist, viele sich finden, welche nicht Quadrate und nicht Kubusse ganzer Zahlen sind.

3) Wenn man Zahlen, welche größer sind als 10, in Binomien auflöst, und diese Summe quadrirt oder kubirt, so findet man

a) beim Quadriren, daß das Quadrat eines Binomiums bestehe:

α) aus dem Quadrate des ersten Gliedes,

β) aus dem doppelten Produkte des ersten und zweiten Gliedes, und

γ) aus dem Quadrate des zweiten Gliedes;

b) beim Kubiren, daß der Kubus eines Binomiums bestehe:

α) aus dem Kubus des ersten Gliedes,

β) aus dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes multiplizirt mit dem zweiten Gliede,

γ) aus dem dreifachen ersten Gliede multiplizirt mit dem Quadrate des zweiten Gliedes, und

δ) aus dem Kubus des dritten Gliedes; d. h.

$15^2 = (10 + 5)^2 = 15 . 15 = (10 + 5) . (10 + 5) = 10^2 + 2 . 10 . 5 + 5^2 = 100 + 100 + 25 = 255$; und

$15^3 = (10 + 5)^3 = (10 + 5) . (10 + 5) . (10 + 5) = 10^3 + (3 . 10^2 . 5) + (3 . 10 . 5^2) + 5^3 = 1000 + 1500 + 750 + 125 = 3375$.

* In der allgemeinen Größenlehre hat man für diese zwei Sätze folgende Formeln.

$$(a + b)^2 = (a + b) . (a + b) = a^2 + 2 . a . b + b^2;$$

$$(a+b)^3 = (a+b) . (a+b) . (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

4) Das Quadrat irgend einer bestimmten Zahl, welche mit n (2, 3...) Ziffern geschrieben ist, kann nicht mehr als 2 . n, und nicht weniger als 2 . n — 1 Ziffern haben; der Kubus irgend einer bestimmten Zahl, welche mit n (2, 3...) Ziffern geschrieben ist, kann nicht mehr als 3 . n und nicht weniger als 3 . n — 2 Ziffern haben.

* Beweise dieser Sätze kann leicht der mündliche Vortrag liefern.

§. 100.

Beispiele.

I. Beispiele zum Quadriren.

I. Es sollen folgende ganze Zahlen quadrirt werden: 78; 1345; 2789; 7031; 42876.

Auflösung.

$78^2 = 78 . 78 = 6084;$

$1345^2 = 1345 . 1345 = 1809025;$

$2789^2 = 2789 . 2789 = 7778521;$

$7031^2 = 7031 . 7031 = 494334961;$

$42876^2 = 42876 . 42876 = 1838351376.$

II. Es sollen folgende gemeine Brüche quatrirt werden:

$\frac{18}{23}; 2\frac{13}{37}; \frac{421}{793}; 12\frac{151}{247}; 129\frac{17}{113}.$

Auflösung.

$$\left(\frac{18}{23}\right)^2 = \frac{18 . 18}{23 . 23} = \frac{324}{529};$$

$$\left(2\frac{13}{37}\right)^2 = \left(\frac{87}{37}\right)^2 = \frac{87 . 87}{37 . 37} = \frac{7569}{1369} = 5\frac{724}{1369};$$

$$\left(\frac{421}{793}\right)^2 = \frac{421 . 421}{793 . 793} = \frac{177241}{628849};$$

$$\left(12\frac{151}{247}\right)^2 = \frac{3115 . 3115}{247 . 247} = \frac{9703225}{61009} = 126\frac{16091}{61009};$$

$$\left(129\frac{17}{113}\right)^2 = \frac{14594 . 14594}{113 . 113} = \frac{212984836}{12769} = 16679\frac{10885}{12769}.$$

III. Man quadrire folgende Dezimalbrüche: 0·3; 0·17; 0·042; 0·00127; 3·84; 12·045; 1·3219; 1200·08.

Auflösung.

$0{\cdot}3^2 = 0{\cdot}3 . 0{\cdot}3 = 0{\cdot}09;$

$0{\cdot}17^2 = 0{\cdot}17 . 0{\cdot}17 = 0{\cdot}0287;$

$0{\cdot}042^2 = 0{\cdot}042 . 0{\cdot}042 = 0{\cdot}001764;$

$0{\cdot}00127^2 = 0{\cdot}00127 . 0{\cdot}00127 = 0{\cdot}0000016129;$

$3{\cdot}84^2 = 3{\cdot}84 . 384 = 14{\cdot}7456;$

$12{\cdot}045^2 = 12{\cdot}045 . 12{\cdot}045 = 145{\cdot}082025;$

$1{\cdot}3219^2 = 1{\cdot}3219 . 1{\cdot}3219 = 1{\cdot}74741961;$

$1200{\cdot}08^2 = 1200{\cdot}08 . 1200{\cdot}08 = 1440105{6}{\cdot}0064.$

II. Beispiele zum Kubiren.

I. Man erhebe in die dritte Potenz folgende ganze Zahlen: 37; 91; 131; 257; 683; 971.

Auflösung.

$37^3 = 37 . 37 . 37 = 1369 . 37 = 50653;$

$91^3 = 91 . 91 . 91 = 8281 . 91 = 753571;$

$131^3 = 131 \cdot 131 \cdot 131 = 2248091;$
$257^3 = 257 \cdot 257 \cdot 257 = 16974593;$
$683^3 = 683 \cdot 683 \cdot 683 = 318611987;$
$971^3 = 971 \cdot 971 \cdot 971 = 915498611.$

II. Man kubire folgende Brüche: $\frac{13}{19}$; $3\frac{7}{13}$; $\frac{247}{373}$; $1\frac{157}{293}$; $\frac{479}{597}$; $\frac{\left(4\frac{2}{3}\right)}{\left(7\frac{1}{5}\right)}$.

Auflösung.

$$\left(\frac{13}{19}\right)^3 = \frac{13 \cdot 13 \cdot 13}{19 \cdot 19 \cdot 19} = \frac{2197}{6859};$$
$$\left(3\frac{7}{13}\right)^3 = \left(\frac{46}{13}\right)^3 = \frac{46 \cdot 46 \cdot 46}{13 \cdot 13 \cdot 13} = \frac{97336}{2197} = 44\frac{668}{2197};$$
$$\left(\frac{247}{373}\right)^3 = \frac{247^3}{373} = \frac{15069223}{51895117};$$
$$\left(1\frac{157}{293}\right)^3 = \frac{450}{293}^3 = \frac{450^3}{293^3} = \frac{91125000}{25153757} =$$
$$\left(\frac{479}{597}\right)^3 = \frac{479^3}{597^3} = \frac{109902239}{212776173};$$
$$\left(\frac{\left(4\frac{2}{3}\right)}{\left(7\frac{1}{5}\right)}\right)^3 = \left(\left(\frac{14}{3}\right) : \left(\frac{36}{5}\right)\right)^3 = \left(\frac{70}{108}\right)^3 = \frac{35^3}{54^3} = \frac{42875}{157464}.$$

III. Folgende Dezimalbrüche sollen in die dritte Potenz erhoben werden: 0·1; 0·19; 0·037; 0·00157; 2·03; 5·93; 17·8.

Auflösung.

$0{\cdot}1^3 = 0{\cdot}1 \cdot 0{\cdot}1 \cdot 0{\cdot}1 = 0{\cdot}001;$
$0{\cdot}19 = 0{\cdot}19 \cdot 0{\cdot}19 \cdot 0{\cdot}19 = 0{\cdot}006859;$
$0{\cdot}037^3 = 0{\cdot}037 \cdot 0{\cdot}037 \cdot 0{\cdot}037 = 0{\cdot}000050653;$
$0{\cdot}00157^3 = 0{\cdot}00157 \cdot 0{\cdot}00157 \cdot 0{\cdot}00157 = 0{\cdot}000000003869893;$
$2{\cdot}03^3 = 2{\cdot}03 \cdot 2{\cdot}03 \cdot 2{\cdot}03 = 8{\cdot}365427;$
$5{\cdot}93^3 = 5{\cdot}93 \cdot 5{\cdot}93 \cdot 5{\cdot}93 = 208{\cdot}527857;$
$17{\cdot}8^3 = 17{\cdot}8 \cdot 17{\cdot}8 \cdot 17{\cdot}8 = 5639{\cdot}752.$

II. Artikel.

Von der Quadratwurzel und von der Kubikwurzel.

§. 101.

Erklärungen.

Aus einer Größe die Wurzel, welche zum Quadrat erhoben die Größe selber gibt, heißt Quadratwurzel. Aus einer Größe die Wurzel, welche zum Kubus erhoben die Größe wieder gibt, heißt Kubikwurzel.

Die Operation, mittelst welcher man die Quadratwurzel findet, heißt das Quadratwurzelausziehen; jene, mittelst welcher man die Kubikwurzel findet, heißt Kubikwurzelausziehen.

Die Aufgabe, daß aus einer Größe die Quadratwurzel ausgezogen werden soll, wird gewöhnlich dadurch angegeben, daß man dem Radikand das Wurzelzeichen ($\sqrt{}$) ohne Radikator versetzt; jene, daß aus einer Größe die Kubikwurzel ausgezogen werden soll, wird dadurch angegeben, daß man dem Radikand das Wurzelzeichen mit dem Radikator 3 ($\sqrt[3]{}$) vorsetzt.

* Die Zeichen $\sqrt[2]{}$ und $\sqrt{}$ sind gleichgeltend, letzteres ist gewöhnlicher.

2) Beim Quadratwurzelausziehen und Kubikwurzelausziehen unterscheide man,

a) ob die Zahl, aus welcher die Wurzel ausgezogen werden soll, ein (reines) Quadrat oder ein (reiner §. 99) Kubus sei,

b) oder nicht.

a.

Ist der gegebenen Radikand ein Quadrat oder ein Kubus, so wird die Wurzel genau erscheinen. (Rationale Größe).

b.

Ist dieser Radikand nicht ein Quadrat oder ein Kubus, so wird die Wurzel nur näherungsweise erscheinen. (Irrationale Größe).

§. 102.

Aufgabe.

Es soll aus einer bestimmten Größe die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Auflösung.

1) Man theile die Größe

a) wenn sie eine ganze Zahl ist, von der Einerstelle gegen die Zehnerstelle in Klassen; deren jede zwei Ziffern hat, bis für die höchste (erste) Klasse zwei oder eine Ziffer bleiben,

b) wenn sie ein Dezimalbruch ist, und zwar

α) ohne Ganze, von der Einerstelle gegen die Zehntel, ... in Klassen, deren jede zwei Ziffern haben muß. — Hat der Dezimalbruch eine ungerade Anzahl von Ziffern, so ist demselben eine ihn nicht ändernde Nulle anzuhängen —, angegeben ist.

β) mit Ganzen, von der Einerstelle gegen die Zehnerstelle die Ganzen wie in a, und gegen die Zehntel ... die Dezimalen wie in b, α angegeben ist.

Dadurch sieht man sogleich, wie viele Ziffern die Wurzel erhalten muß, nämlich so viele als Klassen sind (§. 99. 4).

2) Man nehme von den Quadraten der einfachen Ziffern (§. 99. 2. a) jenes, welches der höchsten Klasse gleich ist, oder das nächst kleinere, wenn die höchste Klasse kein Quadrat ist, und setze die diesem genommenen Quadrate entsprechende Wurzel als die erste Ziffer der zu suchenden Quadratwurzel. Das genommene Quadrat selber aber ziehe man von der ersten Klasse ab, und nehme zur Differenz die zweite Klasse der zu radizirenden Größe.

* Man vergesse in den Wurzeln die Bezeichnung des Anfangs der Dezimalen nicht.

3) Man duplire die gefundene erste Ziffer der Wurzel, setze dieses Duplum (in einer Parenthese) so, daß die Einheiten desselben unter die erste Ziffer der eben angeschriebenen zweiten Klasse zu stehen kommen, dividire durch dasselbe die ober ihm stehenden Zahlen und nehme den Quotienten * als zweite Ziffer der zu suchenden Wurzel. Alsdann multiplicire man ihn mit der Division, und setze das Produkt so, daß

seine Einheiten unter die erste Ziffer der zweiten Klasse kommen. Ferner setze man das Quadrat der zweiten Ziffer (in der Wurzel) so, daß die Einheiten unter die zweite Ziffer der zweiten Klasse kommen, addire beide Produkte zusammen, und subtrahire ihre Summe von der durch die zweite Klasse (nach Punkt 2) vermehrten ersten Differenz.

* Den Quotienten nehme man nicht zu groß und nicht zu klein.

4) Hat die zu radizirende Zahl mehr als 2 Klassen, so setze man zur Differenz (wenn eine solche vorhanden ist) die Ziffern der dritten Klasse, nehme das Duplum der beiden für die Wurzel gefundenen Ziffer, dessen Einheiten unter die erste Ziffer der dritten Klasse kommen, wieder zum Divisor der über ihm stehenden Zahlen, den Quotienten aber als dritte Ziffer der Wurzel. Alsdann verfahre man wieder wie oben, und dieses so fort bis alle Klassen herabgesetzt worden sind.

* Wenn einmal ein Duplum größer ist als die ober ihm stehende Größen, so ist der Theilquotient Null (§. 22. I. 5).

5) Bleibt nach dem Ende dieser Operation noch ein Rest, so ist dieses ein Zeichen, daß die zu reduzirende Zahl nicht ein (vollkommenes) Quadrat ist. Das Quadrat der gefundenen Größe ist noch kleiner als die gegebene Zahl; und es muß zur gefundenen Zahl noch etwas kommen, damit die Wurzel möglichst richtig genommen ist. Die nöthige Hinzugabe ist gewöhnlich ein Dezimalbruch. Denselben findet man dadurch, daß man der zu radizirenden Größe beliebige viele Paare von Nullen als Dezimalen (§. 72) anhängt, und die Auszeihnung fortsetzt. — Die hiedurch erhaltene Wurzel wird, je mehr man Paare von Nullen gebraucht, desto genauer.

1. Zusatz. Um die Quadratwurzel eines Bruches zu erhalten, ziehe man die Wurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner, und theile die Wurzel des Zählers durch die aus dem Nenner. — Wenn der Nenner nicht ein Quadrat ist, so wird man den Bruch durch eine Zahl erweitern, daß er Quadrat wird, damit die Division erleichtert und der Quotus genauer wird.

Man kann den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln und dann radiziren.

2. Zusatz. Aus einer vermischten Zahl wird die Quadratwurzel gezogen, wenn man sie in einen Bruch verwandelt und als solchen radizirt.

Beispiele.

Es sollen aus folgenden Zahlen die Quadratwurzeln ausgezogen werden: 529; 11025; 12769; 630436; 0·9025; 0·011881; 68·7241; 1823·29; 5; 18; 43219; 143·725 $\frac{225}{256}$; $\frac{17}{18}$; $3\frac{4}{5}$; $7\frac{5}{12}$.

Auflösung.

$\sqrt{5|29} = 23.$
—4
129
(4)
12
9
—129
0

$\sqrt{1|10|25} = 105.$
—1
10
(2)
—0
1025
(20)
100
25
—1025
0

$\sqrt{1|27|69} = 113.$
—1
27
(2)
—21
669
(22)
669
—669
0

$\sqrt{63|04|36} = 794.$
—49
1404
(14)
126
81
—1341
6336
(158)
632
16
—6336
0

$\sqrt{0.90|25} = 0·95.$
—81
925
(18)
90
25
—925
0

$\sqrt{68·72|41} = 8·29.$
—64
472
(16)
32
4
—324
14841
(164)
1476
81
14841
0

$\sqrt{5} = \sqrt{5·00...} = 2·236...$
—4
100
(4)
8
4
—84
1600
(44)
132
9
1329
27100
(446)
2676
36
—26796
....

$\sqrt{0·01|18|81} = 0·109.$
—1
18
(2)
—0
1881
(20
180
81
—1881
0

$\sqrt{18|23·29} = 42·7.$
—16
223
(8)
16
4
—164
5929
(84)
588
49
—5929
0

$\sqrt{18} = \sqrt{18·00..} = 4·242..$
—16
200
(8)
16
4
—164
3600
(84)
336
16
—3376
22400
(848)
1696
4
—16964
....

$\sqrt{4|32|19} = 207{\cdot}891\ldots$
−4
32
(4)
−0
3219
(40)
280
49
370·00
(414)
3312
64
381600
(4156)
37404
81
747900
−415781
. . . . . .

$\sqrt{\frac{225}{256}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{256}}$;

$\sqrt{2|25} = 15$;
−1
125
(25)
−125
0

$\sqrt{2|56} = 16$;
−1
156
(26)
−156
0

$\sqrt{\frac{225}{256}} = \frac{15}{16}$,
. . . .

$\sqrt{1|43{\cdot}72|50} = 11{\cdot}5206\ldots$
−1
43
−21
2272
(445)
−2225
4750
(2302)
−4604
14600
23040
0
1460000
230406
−1382436
. . . .

$\sqrt{\frac{17}{18}} = \frac{\sqrt{17 \,.\, 2}}{\sqrt{18 \,.\, 2}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{36}}$;

$\sqrt{34} = 5{\cdot}830\ldots$
−25
900
(10)
80
64
−864
3600
(1163)
−3489
11100
(1166)
0
. . . .

$\frac{\sqrt{34}}{6} = \frac{5{\cdot}830\ldots}{6} = 0{\cdot}9716\ldots$
. . . .

$\sqrt{3\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{19}{5}}=\sqrt{\frac{95}{25}}$;

$\sqrt{95}=9{\cdot}7467\ldots$
−81
1400
(18)
126
49
−1309
9100
(194)
776
16
−7776
132400
(1948)
11688
36
−116916
15484
....

$\frac{\sqrt{95}}{5}=\frac{9{\cdot}7467}{5}=1{\cdot}94934\ldots$

$\sqrt{7\frac{5}{12}}=\sqrt{\frac{89}{12}}=\sqrt{\frac{267}{36}}$;

$\sqrt{2|67}=16{\cdot}3401\ldots$
−1
167
(2)
12
36
−156
1100
(32)
−969
13100
(326)
−13056
4400
(3268)
0
440000
−326801
....

$\frac{\sqrt{267}}{6}=\frac{16{\cdot}3401}{6}\ldots=2{\cdot}723\ldots$

§. 103.

Aufgabe.

Es soll aus einer bestimmten Größe die Kubikwurzel ausgezogen werden.

Auflösung.

1) Man theile die Größe

a) wenn sie eine ganze Zahl ist, von der Einerstelle gegen die Zehnerstelle in Klassen, deren jede drei Ziffern hat, bis für die höchste Klasse drei, zwei, oder oder eine Ziffer bleiben,

b) wenn sie ein Dezimalbruch ist, und zwar

α) ohne Ganze, von der Einerstelle gegen die Zehntel... in Klassen, deren jede drei Ziffern haben muß — Hat der Dezimalbruch nicht eine durch drei theilbare

Anzahl von Ziffern, so sind demselben zwei oder eine ihn nicht ändernde Nulle anzuhängen —

β) mit Ganzen, von der Einerstelle gegen die Zehnerstelle die Ganzen wie in a, und gegen die Zehntel die Dezimalen wie in b. α angegeben ist.

Dadurch sieht man sogleich, wie viele Ziffern die Wurzel haben muß, nämlich so viele als Klassen sind (§. 99. 4).

2) Man nehme von den Kuben der einfachen Ziffern (§. 99. 2. b) jenen, welcher der höchsten Klasse gleich ist, oder den nächst kleinern, wenn die höchste Klasse nicht ein Kubus ist, und setze die diesem genommenen Kubusse entsprechende Wurzel als die erste Ziffer der zu suchenden Kubikwurzel. Den genommenen Kubus selber aber ziehe man von der ersten Klasse ab, und nehme zur Differenz die zweite Klasse der zu radizirenden Größe.

* Man vergesse in den Wurzeln die Bezeichnung des Anfangs der Dezimalen nicht.

3) Unter diese Größe setze man das einfache Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel (in einer Parenthese) so, daß die Einheiten unter die Hunderter (unter die höchste Ziffer) der zweiten Klasse kommen, dividire durch dasselbe die ober ihm stehende Größe und nehme den Quotienten als zweite Ziffer der Kubikwurzel. Alsdann multiplizire man ihn mit dem Divisor, setze das Produkt so, daß seine Einheiten unter die höchste Stelle der zweiten Klasse kommen; unter dieses setze man das Produkt aus dem dreifachen Quadrate der zweiten multiplizirt mit der ersten Ziffer so, daß seine Einheiten unter die zweite Ziffer der zur Differenz gesetzten Klasse kommen; unter dieses setze man noch den Kubus der zweiten Ziffer so, daß sein Einer unter den Einer der dem Unterschied beigegebenen Größe kommt. Diese Produkte addire man mit Berücksichtigung der durch das untereinandersetzen angegebenen Lokalwerthe und ziehe die erhaltene Summe von der aus der Differenz und der zweiten Klasse gebildeten Größe ab.

* Ist diese Summe größer, als der Rest von der höchsten Klasse mehr der zweiten Klasse, so ist die zweite Ziffer zu groß genommen. Man nehme die zweite Ziffer auch nicht zu klein.

4) Hat die zu radizirende Zahl mehr als zwei Klassen, so setze man zur Differenz (wenn eine solche vorhanden ist) die Ziffern der dritten Klasse, nehme das dreifache Quadrat der beiden ersten Wurzelziffer und verfahre so fort wie Nro. 3 angibt, indem man immer die gefundenen Ziffer der Wurzel, wie eine Ziffer behandelt.

5) Bleibt nach der Behandlung aller Klassen kein Rest, so ist die zu radizirende Größe ein Kubus; bleibt aber noch ein Rest, so ist der Kubus der gefundenen Wurzel kleiner als der Radikand, und es muß zur Wurzel noch etwas hinzugegeben werden, damit der Unterschied zwischen Radikand und Kubus der Wurzel unbedeutend groß sei. Diese Zugabe ist gewöhnlich ein Dezimalbruch, welchen man durch den von nicht ändernden Klassen, deren jede aus drei Nullen besteht, auf ähnliche Weise wie beim Quadratwurzelausziehen (§. 102) erhält, und welcher der wahren Wurzel um so näher kommt, aus je mehr Stellen er besteht.

1. Zusatz. Aus einem Bruche wird die Kubikwurzel gezogen, wenn man sie aus Zähler und Nenner zieht und die erste Wurzel durch die zweite theilt. Wenn der Nenner kein reiner Kubus ist, so macht man ihn (zur Erleichterung des Dividirens nach dem Radiziren) durch Erweiterung des Bruches zu einem solchen und radizirt. Man kann auch den eigentlichen Bruch zu einem Dezimalbruch verwandeln und radiziren.

2. Zusatz. Gemischte Zahlen verwandelt man in uneigentliche Brüche und radizirt sie wie Brüche.

Beispiele.

Aus folgenden Zahlen sollen die Kubikwurzeln ausgezogen werden: 185193; 21·952; 3581577; 7·301384

0·000125751501; 0·000000926859375; 9; 0·3; $\frac{15}{16}$; $25\frac{2}{5}$. ;

Auflösung.

$\sqrt[3]{185|193} = 57.$

−125

60193

(75)

525.. = $3.5^2.7$

735. = $3.5.7^2$

343 = 7^3

−60193

0

$\sqrt[3]{3|581|577} = 153$

−1

2581

(3)

15 = $3.1^2.5$

75 = $3.1.5^3$

125 = 5^3

−2375

206577

(675) = (3.15^2)

2025 = $3.15^2.3$

405 = $3.15.3^2$

27 = 3^3

−206577

0

$\sqrt[3]{0·000|125|751|501} = 0·0501$

−125

751

(75)

−0

751501

(7500)

7500 = $3.50^2.1$

150 = $3.50.1^2$

1 = 1^3

−75151

0

$\sqrt[3]{21·952} = 2·8$

−8

13952

(12)

96 = $3.2^2.8$

384 = $3.2.8^2$

512 = 8^3

−13952

0

$\sqrt[3]{7·301|384} = 1·94$

−1

6301

(3)

27 = $3.1^2.9$

243 = $3.1.9^2$

729 = 9^3

−5859

442384

(1083)..

4332.. = $3.19^2.4$

912 = $3.19.4^2$

64 = 4^3

−442384

0

$\sqrt[3]{0·000|000|926|859|375} =$ 0·00975

−729

197859

(243)

1701 = $3.9^2.7$

1323 = $3.9.7^2$

343 = 7^3

−183673

14186375

(28227)

141135

7272

125

−14186375

0

$\sqrt[3]{9} = 2{\cdot}08\ldots$

−8
1000
(12)
−0
1000000
(1200)
9600 = 3 . 20² . 8
3840 = 3 . 20 . 8²
512 = 8³
−998912
1088
. . . .

$\sqrt[3]{0{\cdot}300} = 0{\cdot}6694$

−216
84000
(108)
648 = 3 . 6² . 6
648 = 3 . 6 . 6²
216 = 6³
−71496
12504000
(13068)
117612
16038
729
−11922309
. . . .

$\sqrt[3]{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt[3]{15.4}}{\sqrt[3]{16{,}4}} = \frac{\sqrt[3]{60}}{4}$;

$\sqrt[3]{25\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt[3]{127}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{(127\,.\,25)}}{5}$

$\sqrt[3]{60} = 3{\cdot}914\ldots$

−27
33000
(27)
243 = 3 . 3² . 9
729 = 3 . 3 . 9²
729 = 9³
−32319
681000
(4563)
4563
117
1
−457471
223529000
. . . .

$\frac{\sqrt[3]{60}}{4} = \frac{3{\cdot}194}{4}\ldots = 0{\cdot}9785\ldots$

$\sqrt[3]{3175} = 14{\cdot}71\ldots$

−1
2175
(3)
12
48
64
−1744
431000
(588)
4116
686
343
−418803
12197000
(64827)
. . . .

$\frac{\sqrt[3]{3175}}{5} = \frac{14{\cdot}71}{5}\ldots = 2{\cdot}95\ldots$

* * *

Für die Aufgabe §. 102 und §. 103 können leicht Auflösungsarten angegeben werden, welche zugleich die Richtigkeit des Verfahrens zeigen. Man theilt in diesen auch den Radikand in Klassen und nimmt von demselben die Bestandtheile des Quadrates oder des Kubus eines Polynomiums hinweg, bis die Wurzel nach verlangter Bestimmung gefunden ist.

B. Von den Potenzen benannter Zahlen.

§. 104.

Beispiele.

I.

I. Jemand antwortete auf die Frage, wie alt er sei? Folgendes: Als ich 6 Jahre alt war, wurde ich von meinen Eltern in die Schule geschickt. Die Zahl des Jahres aber, in welchem ich zum erstenmal in die Schule kam, ist die Quadratwurzel aus 3297856. Berechnen Sie nun das Jahr meiner Geburt.

Auflösung.

$\sqrt{3297856} = x;$

$\sqrt{3|29|78|56} = 1816;$

```
—1
 229
 (28)
—224
   578
  —361
  21756
  (3626)
 —21756
      0
```

Das der Geburt ist also 1816 — 6 = 1810.

II. Jemand wollte wissen, als er in ein kreisrundes Bethhaus geführt wurde, welches der Durchmesser des Bodens dieses Gebäudes wäre. Man antwortete ihm, der Boden halte genau 7238·2464 □′ in sich; den Durchmesser solle er daraus berechnen. Welche Länge wird er gefunden haben?

Auflösung.

$$\frac{d.d.\pi}{4} = \frac{d^2.\pi}{4} = \text{Circ.} \quad d = x.$$

$$\frac{3{\cdot}1416.x^2}{4} = 7238{\cdot}2464$$

$$x^2 = \frac{7238{\cdot}2464.4}{3{\cdot}1416} = 9216$$

$$\sqrt{9216} = x = 96$$

$$\begin{array}{r} -81 \\ \hline 1116 \\ (186) \\ -1116 \\ \hline 0 \end{array}$$

Der Durchmesser ist 96 Fuß lang.

III. Jemand pflanzt 7920 Bäumchen in Reihen. Er setzt in jede Reihe so viele Stücke als er Reihen gemacht hatte, und findet, daß er für die letzte Reihe ein Stück zu wenig habe. Wie viele Reihen waren es und wie viele Stücke kamen in jede Reihe?

Auflösung.

Bringt man das fehlende Stück in Rechnung, so kann man die Anzahl der Bäumchen dem Quadrate der Reihen gleich setzen, und erhält

$$x^2 = 7920 + 1 = 7921;$$

$$x = \sqrt{79|21} = 89$$

$$\begin{array}{r} -64 \\ \hline 1521 \\ (169) \\ -1521 \\ \hline 0 \end{array}$$

IV. Ein Feldherr stellt seine Soldaten, 33500 Mann, so in Reihen auf, daß in jeder Reihe so viele Soldaten stehen als er Reihen gemacht hatte. Es bleiben ihm 11 Mann übrig; wie viele Reihen hatte er gemacht?

Auflösung.

Man nehme von der Armee 11 Mann hinweg, so hat man ein Quadrat, von dem die Wurzel die Zahl der Reihen gibt.

$$x^2 = 33500 - 11 = 33489;$$

$$x = \sqrt{3|34|89} = 183;$$

$$\begin{array}{r} -1 \\ \hline 234 \\ (28) \\ -224 \\ \hline 1089 \\ (363) \\ -1089 \\ \hline 0 \end{array}$$

Es waren 183 Reihen.

V. Jemand bringt zu einem Spielwerkzeugverfertiger ein Damenbret, dessen Seite $14\frac{2}{3}''$ lang ist, und bestellt ein ähnliches, welches aber nur einen halb so großen Flächeninhalt haben soll. Wie lange muß die Seite von diesem werden?

Auflösung.

Man berechne den Flächeninhalt von dem ersten und ziehe aus der Hälfte die Wurzel aus.

$$14\frac{2}{3} \times 14\frac{2}{3} = \frac{44 \cdot 44}{9} = \frac{1936}{9};$$

$$x^2 = \frac{1936:2}{9} = \frac{968}{9};$$

$$\sqrt{968} = 31{\cdot}11\ldots$$

$$\begin{array}{r} -9 \\ \hline 68 \\ -61 \\ \hline 700 \\ -621 \\ \hline 7900 \\ -6221 \\ \hline \ldots\ldots \end{array}$$

$$x = \frac{31{\cdot}11}{3}\ldots = 10{\cdot}37\ldots$$

VI. Die Schüler einer Klasse verzehrten bei einem gemeinschaftlichen Feste 20 Bayerthaler und 6 Sechser. Da nach allgemeiner Uebereinkunft die 6 unter ihnen befindlichen Armen Nichts bezahlen sollten, so mußte jeder zum Zahlen

Verpflichtete so viele Kreuzer zur Zeche geben, als Vermögliche unter ihnen waren. Wie viele Schüler waren bei diesem Feste?

Auflösung.

Man addire zur Wurzel aus der Anzahl Kreuzer 6.

20 Bayerthlr. + 6 Sechser = 2916 kr.

$$\sqrt{2916} = 54;$$

—25
416
(104)
—416
0

Es waren 54 + 6 = 60 Schüler.

VII. Den Preis eines Diamanten pflegt man zu bestimmen, indem man die Zahl der Karate, welche er wiegt, erst mit sich selbst, und dann mit dem festgesetzten Preis eines Karates multiplizirt. Ein Diamant soll, da für einen Karat nur 40 fl. gerechnet wird, 112896000 fl. werth sein; welches ist sein Gewicht?

Auflösung.

$$x^2 . 40 = 112896000;$$

$$x^2 = 112886000 : 40 = 2822400;$$

$$x = \sqrt{2|82|24|00} = 1680$$

—1
182
(26)
—156
2624
(328)
—2624
0

Dieser Edelstein wiegt 1680 Karate.

II.

I. Jemand verwahrte 15620 fl. in einen Kasten mit mehrern Fächern; er legt in jedes Fach so viel Päckchen, und in jedes Päckchen so viel Gulden, als Fächer im Kasten sind, nur in ein einziges Päckchen kommen 5 fl. weniger. Wie viele Fächer hatte der Kasten?

Auflösung.

Man nehme an, es seien in allen Päckchen gleich viele Gulden also im Ganzen (15620 + 5) fl. gewesen, so hat man

$$x.x.x = x^3 = 15625;$$

$$x = \sqrt[3]{15|625} = 25$$

```
 —8
 ————
  7625
  (12)
  60   = 3.2².5
  150  = 3.2.5²
   125 = 5³
 —7625
 ————
     0
```

Der Kasten hatte 25 Fächer.

II. Ein armer Waise, welchem bei einem Brande die Flammen seine Habe verzehrten, erhielt an einer Studienanstalt in einer Klasse von jedem Schüler so viele Kreuzer als Schüler in der Klasse waren. Er sprach dankend: „Ach! wären doch an dieser Bildungsanstalt so viele Klassen, als in dieser Klasse Schüler sind, und erhielte ich überall, was mir hier die opfernde Theilnahme gab, ich brauchte nur mehr 22 fl. 24 kr. und ich hätte 800 fl., welche Summe meine seligen Eltern mir hinterlassen hatten." Wie viele Schüler waren in dieser Klasse?

Auflösung.

Man nehme von 800 fl. hinweg 22 fl. 24 kr., mache den Rest zu Kreuzern und setze die Zahl der Schüler = x.

$$x^3 = (800 \times 60) - (22 . 60) - 24;$$
$$= 778 . 60 - 24 = 46680 - 24 = 46656;$$

$$x = \sqrt[3]{46|656} = 36$$

```
 —27
 ————
  19656
  (27)
  162   = 3.3².6
   324  = 3.3.6²
    216 = 6³
 —19656
 ————
      0
```

Es waren 36 Schüler in dieser Klasse.

* Aus der Raumgrößenlehre können viele Beispiele zur Uebung dienen.

Dritter Curs.

I. Hauptstück.

Von den Verhältnissen und Proportionen überhaupt.

II. Hauptstück.

Von den Proportionen.

A. Von den reinen Proportionen.

I. Artikel.

Von den reinen arithmetischen Proportionen.

II. Artikel.

Von den reinen geometrischen Proportionen.

B. Von den angewandten Proportionen.

I. Abtheilung.

Von der Anwendung der Proportionen und von einigen benannten Größen.

I. Artikel.

Von der Anwendung der Proportionen.

II. Artikel.

Von einigen benannten Größen.

II. Abtheilung.

Beispiele aus dem Leben, in welchen die reine Lehre der Proportionen Anwendung findet.

I. Artikel.

Angewandte arithmetische Proportionen.

II. Artikel.

Angewandte geometrische Proportionen.

Dritter Curs.

I. Hauptstück.

Von den Verhältnissen und Proportionen überhaupt.

II. Hauptstück.

Von den Proportionen.

A. Von den reinen Proportionen.

I. Artikel.

Von den reinen arithmetischen Proportionen.

II. Artikel.

Von den reinen geometrischen Proportionen.

B. Von den angewandten Proportionen.

I. Abtheilung.

Von der Anwendung der Proportionen und von einigen benannten Größen.

I. Artikel.

Von der Anwendung der Proportionen.

II. Artikel.

Von einigen benannten Größen.

II. Abtheilung.

Beispiele aus dem Leben, in welchen die reine Lehre der Proportionen Anwendung findet.

I. Artikel.

Angewandte arithmetische Proportionen.

II. Artikel.

Angewandte geometrische Proportionen.

I. Hauptstück.

Von den Verhältnissen und Proportionen überhaupt.

I. Von den Verhältnissen.

§. 105.

Erklärungen.

1) Der Begriff eines Verhältnisses drückt überhaupt eine gewisse Beziehung oder Verbindung aus, die zwischen zwei Gegenständen statt findet; in der Arithmetik drückt er eine gewisse Verbindung aus, in welcher zwei Zahlen gegen einander sich zeigen, wie eine aus der andern entstanden ist. Der Begriff Verhältniß in der Arithmetik drückt die Entstehungsart einer Zahl aus der andern aus.

2) Unter den verschiedenen Arten, auf welche Zahlen von einander abgeleitet werden können, sind in der Lehre von Verhältnissen besonders zwei zu beachten.

Man kann sich vorstellen

a) eine Zahl entstehe dadurch aus einer andern, daß man noch irgend eine Zahl hinzuaddirt (oder auch von ihr hinwegnimmt); oder

b) auch dadurch, daß man eine Zahl mit irgend einer Zahl multiplizirt (oder durch irgend eine Zahl dividirt).

a.

Im ersten Falle heißt das Verhältniß „ein arithmetisches Verhältniß.“ Dieses Verhältniß untersucht bei Vergleichung zweier Zahlen, um wie viel Einheiten eine Zahl noch größer sei, als die andere. Dieses wird aber gefunden durch Subtraction der kleinern Zahl von der größern;

daher ist das schicklichste Zeichen für das arithmetische Verhältniß jenes der Subtraction, welches zwischen die beiden zu vergleichenden Größen gesetzt wird. Z. B.

7 — 4;

8 — 15.

b.

Im zweiten Falle heißt das Verhältniß „ein geometrisches Verhältniß." Dieses Verhältniß bestimmt, wie viel mal eine Zahl größer, als die andere sei. Dieses findet man durch Division; daher ist das schicklichste Zeichen für das geometrische Verhältniß jenes der Division, welches zwischen die beiden Größen gesetzt wird. Z. B.

18 : 6;

12 : 36.

3) In jedem Verhältnisse unterscheidet man:

a) die zwei verglichenen Größen (Glieder des Verhältnisses) und

b) die das Verhältniß anzeigende Größe (den Verhältnißzeiger) welche Größe

α) beim arithmetischen Verhältnisse der Unterschied (die Differenz) heißt,

β) beim geometrischen der Quotus ist, und der Verhältniß-Exponent genannt wird.

4) Verhältnisse heißen:

A. wenn man sie einzeln betrachtet:

a) steigend, wenn das zuletzt stehende (das Hinterglied) größer ist, als das zuerststehende (das Vorderglied); z. B.

5 — 8;

4 : 12;

b) fallend, wenn das Consequens kleiner ist als das Antecedens; z. B.

11 — 7;

15 : 5;

B. wenn wenigstens zwei verglichen werden,

a) gleich, wenn die Verhältnißexponenten die nämlichen sind; z. B.

7 — 4 }
11 — 8 } gleiche arithmetische Verhältnisse;

15 : 5 }
12 : 4 } gleiche geometrische Verhältnisse;

b) ungleich, wenn die Verhältnißzeiger ungleich (verschieden) sind; z. B.

5 — 11 }
6 — 13 } ungleiche arithmetische Verhältnisse;

2 : 10 }
3 : 9 } ungleiche geometrische Verhältnisse.

II. Von den Proportionen.

§. 106.

Erklärungen.

1) Die Zusammenstellung zweier gleicher Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen verbunden, gibt eine Proportion, und zwar

a) eine arithmetische, wenn die gleichen Verhältnisse arithmetisch,

b) eine geometrische, wenn die gleichen Verhältnisse geometrisch sind; z. B.

a.

$$7 - 4 = 11 - 8;$$
$$9 - 11 = 15 - 17;$$

b.

$$12 : 4 = 9 : 3;$$
$$28 : 7 = 16 : 4.$$

2) Jede Proportion besteht aus vier Gliedern (wenn dieselben auch nicht alle angeschrieben sind). Man nennt davon:

a) das erste und letzte (vierte) Glied einer Proportion die äußern Glieder;

b) das zweite und dritte die mittlern oder innern Glieder, und

c) die beiden Vorder= (d. i. das erste und dritte) oder die beiden Hinter=Glieder (d. i. das zweite und vierte) homologe oder gleichnamige Glieder.

3) Wenn in einer Proportion die mittlern Glieder einan=

der nicht gleich sind, so heißt die Proportion **diskret**; wenn die Glieder aber gleich sind, so heißt sie **stetig**; z. B.

4 — 7 = 9 — 12 4 : 12 = 5 : 15	diskrete Proportionen.
7 — 4 = 4 — 1 12 : 6 = 6 : 3	stetige Proportionen.

Anmerkung. Stetige Proportionen schreibt man Kürze halber gewöhnlich nur mit drei Gliedern an, indem man das mittlere Glied, welches die **mittlere Proportionalzahl** heißt, nur einmal setzt und das Gleichheitszeichen wegläßt. Z. B.

für 9 — 7 = 7 — 5 schreibt man Kürze halber 9 — 7 — 5;
für 4 : 16 = 16 : 64 schreibt man 4 : 16 : 64.

* Wenn von drei aufeinander folgenden Größen die erste sich zur zweiten, wie diese sich zur dritten verhält, so bilden die Größen eine stetige Proportion.

II. Hauptstück.

Von den Proportionen im Besondern.

A. Von den reinen Proportionen.

I. Artikel.

Von den reinen arithmetischen Proportionen.

§. 107.

Sätze.

1) Der Hauptsatz für die arithmetischen Proportionen überhaupt lautet:

„**Die Summe der äußern Glieder ist gleich der Summe der mittlern Glieder.**"

2) Speziell lautet dieser angeführte Hauptsatz:

I. für die diskreten arithmetischen Proportionen:

„**In jeder diskreten arithmetischen Pro-**

portion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern Glieder;".

II. für die stetigen arithmetischen Proportionen:

„In jeder stetigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich dem doppelten mittlern Gliede."

Beweis.

I. In jeder diskreten arithmetischen Proportion besteht die Summe der äußern, wie die Summe der innern Glieder:

aus dem ersten Gliede,

aus dem dritten Gliede und

aus dem Verhältnißzeiger (aus der Differenz), d. i. aus denselben Summanden;

Summen aus denselben Summanden sind aber einander gleich. Also. —

II. In jeder stetigen arithmetischen Proportion besteht die Summe der äußern Glieder, wie das Doppelte des mittlern Gliedes:

aus dem ersten Gliede,

aus dem mittlern Gliede und

aus dem Verhältnißzeiger. — Also. —

Beispiele.

I. $7 - 12 = 9 - 14$;

$7 + 14 = 7 + (9 + 5) =$ Summe der äußern Glieder;

$12 + 9 = (7 + 5) + 9 =$ Summe der innern Glieder;

$7 + 9 + 5 = 7 + 5 + 9$.

II. $18 - 25 = 31 - 38$;

$18 + 38 = 18 + (31 + 7)$;

$25 + 31 = (18 + 7) + 31$;

$18 + 31 + 7 = 18 + 7 + 31$.

III. $5 - 11 = 11 - 17$;

$5 + 17 = 5 + (11 + 6) =$ Summe der äußern Glieder;

$11 + 11 = (5 + 6) + 11 =$ Summe der innern Glieder;

$5 + 11 + 6 = 5 + 6 + 11$.

IV. $17 - 29 - 41$;
$17 + 41 = 17 + (29 + 12)$;
$29 + 29 = 29 + (17 + 12)$;
$17 + 29 + 12 = 29 + 17 + 12$.

§. 108.

Aufgabe.

In einer arithmetischen Proportion ein fehlendes Glied zu suchen.

Auflösung.

I. Sind in einer arithmetischen diskreten Proportion drei Glieder gegeben, so sucht man das vierte so, daß man

1) wenn das zu suchende Glied ein äußeres ist, von der Summe der mittlern Glieder das gegebene äußere abzieht;
2) wenn das zu suchende Glied ein mittleres ist, von der Summe der äußern Glieder das gegebene mittlere abzieht. Z. B.

I. $7 - 10 = 13 - x$. II. $x - 9 = 14 - 19$.

Auflösung.

$7 - 10 = 13 - x$; $x - 9 = 14 - 19$;
$7 + x = 10 + 13$; $x + 19 = 9 + 14$;
$x = 23 - 7$; $x = 23 - 19$;
$x = 16$. $x = 4$.

III. $18 - 23 = x - 12$. IV. $19 - x = 21 - 26$.

Auflösung.

$18 - 23 = x - 12$; $19 - x = 21 - 26$;
$x + 23 = 18 + 12$; $x + 21 = 19 + 26$;
$x = 30 - 23$; $x = 45 - 21$;
$x = 7$. $x = 24$.

* Zur Probe substituire man das gefundene Glied.

II. Sind in einer arithmetischen stetigen Proportion zwei Glieder gegeben, so sucht man das dritte so, daß man,

1) wenn das zu suchende Glied ein äußeres ist, das gegebene mittlere mit 2 multiplizirt und von diesem Produkte das gegebene äußere abzieht;
2) wenn das zu suchende Glied das mittlere ist, die Summe der äußern Glieder durch 2 theilt. Z. B.

I. x — 17 — 23. II. 15 — 19 — x.

Auflösung.

x — 17 — 23; 15 — 19 — x;

$x + 23 = 17 \times 2;$ $x + 15 = 19 \times 2;$

$x = 34 - 23;$ $x = 38 - 15;$

$x = 11.$ $x = 23.$

III. 9 — x — 17.

Auflösung.

9 — x — 17;

$x = (9 + 17) : 2;$

$x = 26 : 2;$

$x = 13.$

II. Artikel.

Von den reinen geometrischen Proportionen.

§. 109.

Sätze.

1) Der Hauptsatz für die geometrischen Proportionen überhaupt lautet:

„In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder, gleich dem Produkte der mittlern Glieder."

2) Speziell lautet der angeführte Hauptsatz:

I. für die diskreten geometrischen Proportionen:

„In jeder diskreten geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der mittlern Glieder;"

II. für die stetigen geometrischen Proportionen:

„In jeder stetigen geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte des mit sich selbst multiplizirten mittlern Gliedes."

Beweis.

I. In jeder diskreten geometrischen Proportion besteht das Produkt der äußern Glieder, wie das der innern:

aus dem ersten multiplizirt mit dem dritten Gliede, multiplizirt mit dem Verhältnißzeiger, d. i. aus denselben Faktoren;

Produkte aus denselben Faktoren sind aber einander gleich. — Also —

II. In jeder stetigen geometrischen Proportion besteht das Produkt der äußern Glieder, wie das des mit sich selbst multiplizirten mittleren Gliedes;

aus dem ersten multiplizirt mit dem mittlern Gliede, multiplizirt mit dem Verhältnißzeiger, d. i. aus denselben Faktoren;

Produkte aus denselben Faktoren sind aber einander gleich. — Also —

§. 110.

Aufgabe.

In einer geometrischen Proportion ein fehlendes Glied zu finden.

Auflösung.

I. Sind in einer geometrischen diskreten Proportion drei Glieder gegeben, so sucht man das vierte so, daß man,

1) wenn das zu suchende Glied ein äußeres ist, das Produkt der mittlern Glieder durch das gegebene äußere theilt, und den Quotienten als gesuchte Größe nimmt;

2) wenn das zu suchende Glied ein mittleres ist, das Produkt der äußern Glieder durch das gegebene mittlere Glied theilt... Z. B.

I. $4 : 12 = 7 : x$. II. $x : 18 = 11 : 33$.

Auflösung.

$4 : 12 = 7 : x$;	$x : 18 = 11 : 33$;
$4x = 12 \times 7$;	$33x = 18 \times 11$;
$x = \frac{84}{4}$;	$x = \frac{198}{33}$;
$x = 21$.	$x = 6$.

III. $3 : 15 = x : 42$. IV. $7 : x = 13 : 65$.

Auflösung.

$5 : 15 = x : 42;$ $\qquad$ $7 : x = 13 : 65;$

$15x = 42 \times 5;$ $\qquad$ $13x = 65 \times 7;$

$x = \frac{210}{15};$ $\qquad$ $x = \frac{455}{13};$

$x = 14.$ $\qquad$ $x = 35.$

II. Sind in einer geometrischen stetigen Proportion zwei Glieder gegeben, so sucht man das dritte so, daß man,

1) wenn das zu suchende Glied ein äußeres ist, das mittlere Glied mit sich selbst multiplizirt, und das Produkt durch das gegebene äußere Glied theilt;

2) wenn das zu suchende Glied das mittlere Glied ist, aus dem Produkte der äußern Glieder die zweite Wurzel (Quadratwurzel) auszieht (§. 102). Z. B.

I. $7 : 42 : x.$ $\qquad$ II. $x : 15 : 45.$

Auflösung.

$7 : 42 : x;$ $\qquad$ $x : 15 : 45;$

$7x = 42 \times 42;$ $\qquad$ $45x = 15 \times 15;$

$x = \frac{1764}{7};$ $\qquad$ $x = \frac{225}{45};$

$x = 252.$ $\qquad$ $= 5.$

III. $3 : x : 48.$

Auflösung.

$$3 : x : 48;$$
$$x \times x = 3 \times 48;$$
$$x^2 = 144;$$
$$x = \sqrt{144};$$
$$x = 12.$$

§. 111.

Sätze.

In Hinsicht der geometrischen Proportionen sind noch folgende Sätze zu merken:

1) In jeder geometrischen Proportion lassen sich die mittleren und äußeren Glieder verwechseln oder die Verhältnisse umkehren. — Es läßt sich jede geometrische Proportion achtmal verschieden anschreiben. — Z. B.

Es sollen nachstehende Proportionen verschieden angeschrieben werden:

I. $4 : 12 = 7 : 21$. II. $15 : 5 = 9 : 3$.

Auflösung.

I.	II.
$4 : 12 = 7 : 21$;	$15 : 5 = 9 : 3$;
$4 : 7 = 12 : 21$;	$15 : 9 = 5 : 3$;
$7 : 21 = 4 : 12$;	$9 : 3 = 15 : 5$;
$7 : 4 = 21 : 12$;	$9 : 15 = 3 : 5$;
$12 : 21 = 4 : 7$;	$5 : 15 = 3 : 9$;
$12 : 4 = 21 : 7$;	$5 : 3 = 15 : 9$;
$21 : 12 = 7 : 4$;	$3 : 9 = 5 : 15$;
$21 : 7 = 12 : 4$.	$3 : 5 = 9 : 15$.

2) Eine geometrische Proportion bleibt ihrem Werthe nach unverändert, wenn ein äußeres und ein mittleres Glied mit derselben Zahl multiplizirt oder durch dieselbe dividirt wird. Z. B.

I. Man erweitere nachstehende Proportionen:

$3 : 5 = 6 : 10$ mit der Zahl 4.

Auflösung.

$3 : 5 = 6 : 10$;

$12 : 20 = 6 : 10$; oder

$3 : 5 = 24 : 40$.

II. Es soll die nachstehende Proportion vereinfacht werden:

$6 : 24 = 7 : 28$.

Auflösung.

$6 : 24 = 7 : 28$;

$1 : 4 = 7 : 28$; oder

$6 : 24 = 1 : 4$.

1. Zusatz. Ein Bruch wird aus einer geometrischen Proportion hinausgeschafft, wenn man ein äußeres und ein mittleres Glied mit dem Nenner des Bruches multiplizirt. Z. B.

Es sollen aus folgenden Proportionen die Brüche entfernt werden:

I. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = 9\frac{1}{6} : 11$. II. $\frac{3}{5} : 4 = \frac{2}{9} : 1\frac{13}{27}$.

Auflösung.

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = 9\frac{1}{6} : 11$; $\frac{3}{5} : 4 = \frac{2}{9} : 1\frac{13}{27}$;

$$\frac{2\times5}{3} : \frac{4\times5}{5} = \frac{55}{6} : 11;$$
$$\frac{10}{3} : 4 = \frac{55}{6} : 11;$$
$$\frac{10\times3}{3} : 4\times3 = \frac{55}{6} : 11;$$
$$10 : 12 = \frac{55}{6} : 11;$$
$$10 : 12 = \frac{55\times6}{6} : 11\times6;$$
$$10 : 12 = 55 : 66.$$

$$\frac{5\times3}{5} : 4\times5 = \frac{2}{9} : \frac{40}{27};$$
$$3 : 20 = \frac{2\times27}{9} : \frac{40\times27}{27};$$
$$3 : 20 = \frac{54}{9} : 40;$$
$$3 : 20 = 6 : 40.$$

2. Zusatz. Zwei (oder auch mehrere) Proportionen können in eine einzige verwandelt werden, wenn man die einzelnen Glieder der Ordnung nach miteinander multiplizirt oder durch einander dividirt.

Wenn von zwei Proportionen eine derselben zwei unbekannte Größen enthält, so kann durch Versetzung (nach dem Satze 1) und diesem Zusatze eine Proportion (eine zusammengesetzte Proportion mit einer unbekannten Größe) daraus gebildet werden. Z. B.

I. Man verwandle $7 : 21 = 2 : 6$ und $4 : 8 = 12 : 24$ in eine Proportion.

Auflösung.

$$7 : 21 = 2 : 6;$$
$$4 : 8 = 12 : 24;$$
$$7\times4 : 21\times8 = 2\times12 : 6\times24;$$
$$28 : 168 = 24 : 144;$$
$$1 : 6 = 1 : 6; \text{ oder}$$
$$\left(\frac{7}{4}\right) : \left(\frac{21}{8}\right) = \frac{2}{12} : \frac{6}{24};$$
$$(7\times8) : (21\times4) = (2\times24) : (6\times12);$$
$$56 : 84 = 48 : 72;$$
$$8 : 12 = 6 : 9;$$
$$2 : 3 = 2 : 3.$$

II. Man mache aus $5 : x = 7 : y$ und $3 : 5 = x : 25$ eine einzige Proportion.

Auflösung.

$$\begin{array}{l} 5 : x = 7 : y; \\ 3 : 5 = x : 25; \\ \hline 5 : x = 7 : x; \\ x : 25 = 3 : 5; \\ \hline (5 \times x) : (25 \times x) = (7 \times 3) : 5 \times y; \\ 5 : 25 = 21 : 5 \times y; \\ 5 : 5 = 21 : y; \\ 1 : 1 = 21 : y. \end{array}$$

III. Man mache aus $3 : 8 = 5 : y$, und $7 : 16 = y : z$ und $6 : 15 = z : x$ eine einzige Proportion.

Auflösung.

$$\begin{array}{l} 3 : 8 = 5 : y; \\ 7 : 16 = y : z; \\ 6 : 15 = z : x; \\ \hline (3 \times 7 \times 6) : (8 \times 16 \times 15) = (5 \times y \times z) : (y \times z \times x); \\ 126 : 1920 = 5 : x; \\ 21 : 320 = 5 : x. \end{array}$$

IV. Man mache aus $4 : 7 = x : y$ und $9 : 11 = z : y$ und $7 : z = 8 : 15$ eine zusammengesetzte Proportion.

Auflösung.

$$\begin{array}{l} 4 : 7 = x : y; \\ 9 : 11 = z : y; \\ 7 : z = 8 : 15. \\ \hline 4 : 7 = x : y; \\ z : 9 = y : 11; \\ 7 : z = 8 : 15. \\ \hline (4 \times z \times 7) : (7 \times 9 \times z) = (x \times y \times 8) : (y \times 11 \times 15); \\ (4 \times 7) : 63 = (8 \times x) : 11 \times 15; \\ 28 : 63 = 8 \times x : 165; \\ 4 : 9 = 8 \times x : 165; \\ \frac{4}{8} : 9 = x : 165; \\ \frac{1}{2} : 3 = x : 55; \\ 1 : 6 = x : 55. \end{array}$$

3) In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe (oder Differenz) der Vorderglieder zur Summe (oder Differenz) der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede; d. i. z. B.

in $7 : 21 = 4 : 12$ verhält sich,

$(7 + 4) : (21 + 12) = 7 : 21 = 4 : 12$; denn

$$\frac{11}{33} = \frac{7}{21} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}; \text{ und}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{7}{21} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Zusatz. In mehreren gleichen geometrischen Verhältnissen verhält sich die Summe (oder Differenz) aller Vorderglieder zur Summe (oder Differenz) aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede; d. i.

wenn $3 : 6 = 4 : 8 = 5 : 10 = 7 : 14 = 11 : 22 = \ldots$,

so verhält sich auch

$$\left.\begin{array}{l}(3 + 4 + 5 + 7 + 11) : (6 + 8 + 10 + 14 + 22) = \\ (3 - 4 - 5 - 7 - 11) : (6 - 8 - 10 - 14 - 22) = \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 : 6; \\ 4 : 8; \\ 5 : 10; \\ 7 : 14; \\ 11 : 22; \end{array}$$

denn $\dfrac{3 + 4 + 5 + 7 + 11}{6 + 8 + 10 + 14 + 22} = \dfrac{30}{60} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$; und

$$\frac{3 - 4 - 5 - 7 - 11}{6 - 8 - 10 - 14 - 22} = \frac{24}{48} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1 + 1 + 2 + 4}{2 + 2 + 4 + 8} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

§. 112.

Aufgabe.

Eine Zahl in mehrere Theile nach gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Auflösung.

1) Man setze die das Verhältniß bestimmenden Größen in Ordnung als Summanden gleich ihrer Summe.

2) Man nehme an, die gesuchten Theile der zu theilenden Zahl (welche allgemein S heißen mag) seien x, y, v, w... z (an der Zahl so viele unbekannte als viele das Ver-

hältniß bestimmende bekannte Größen gegeben sind). Es wird deßhalb $(x + y + v + w + \ldots z) = S$.

3) Aus den nach 1 und 2 erhaltenen zwei Gleichungen bilde man eine Proportion, indem man diese Gleichungen durcheinander dividirt.

4) Diese Proportion löse man in so viele Proportionen auf, als das Verhältniß bestimmende Größen gegeben sind, indem man sagt (§. 111. 3. Zusatz): Es verhält sich der erste (2te, 3te, 4te... nte) der bekannten zum ersten (2ten, 3ten, 4ten... nten) der unbekannten Summanden, wie die Summe der bekannten zur Summe der unbekannten Summanden.

5) Aus den auf diese Weise gebildeten Proportionen suche man nach §. 110 die Unbekannten, welche die Theile sind, in welche die Zahl getheilt werden soll.

Beispiele.

I. Man theile 340 in vier Theile, welche sich zu einander verhalten, wie 2 : 3 : 5 : 7.

Auflösung.

$$(2 + 3 + 5 + 7) = 17;$$
$$(x + y + v + z) = 340;$$
$$(2 + 3 + 5 + 7) : (x + y + v + z) = 17 : 340 = 1 : 20;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 : x = \\ 3 : y = \\ 5 : v = \\ 7 : z = \end{array}\right\} 1 : 20; \quad \begin{array}{l} x = 40; \\ y = 60; \\ v = 100; \\ z = 140. \end{array}$$
$$\overline{x + y + v + z = 340.}$$

II. Man zerlege die 1680 in sechs Theile, welche sich verhalten wie die ersten sechs geraden Zahlen.

Auflösung.

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42;$$
$$z + y + v + w + t + z = 1630;$$
$$(x + y + v + w + t + z) : (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12) = \left\{\begin{array}{l} 1680 : 42; \\ 40 : 1. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x : 2 = \\ y : 4 = \\ v : 6 = \\ w : 8 = \\ t : 10 = \\ z : 12 = \end{array}\right\} 40 : 1; \quad \begin{array}{l} x = 80; \\ y = 160; \\ v = 240; \\ w = 320; \\ t = 400; \\ z = 480; \end{array}$$
$$x + y + v + w + t + z = 1680.$$

III. Es soll 17280 in solche Summanden zerlegt werden, welche sich zu einander verhalten, wie die ersten sechs ungeraden Zahlen.

Auflösung.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36;$$
$$x + y + v + w + t + z = 17280;$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 : x = \\ 3 : y = \\ 5 : v = \\ 7 : w = \\ 9 : t = \\ 11 : z = \end{array}\right\} \begin{array}{l} 36 : 17280; \\ 3 : 1440; \\ 1 : 480; \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = 480; \\ x = 1440; \\ v = 2400; \\ w = 3360; \\ t = 4320; \\ z = 5280. \end{array}$$

B. Von den angewandten Proportionen.

I. Abtheilung.

Von der Anwendung der Proportionen und von einigen benannten Größen.

I. Artikel.

Von der Anwendung der Proportionen.

§. 113.

Erklärungen.

1) Die Theorie von den Verhältnissen und Proportionen wird in verschiedennamigen praktischen, bald einfachen, bald zusammengesetzten Rechnungsarten angewendet. Denn nimmt man Rücksicht auf die Gegenstände, welche im bürgerlichen Leben am meisten in Rechnung gebracht werden, so bemerkt man bald, daß zwischen denselben mathematische Verhältnisse zu stehen kommen.

2) In bei weitem wenigern Fällen finden eine Anwendung

a) die arithmetischen Verhältnisse und Proportionen, als

b) die geometrischen Verhältnisse und Proportionen.

a.

Mittelst der arithmetischen Verhältnisse und Proportionen rechnet man:

α) wenn Erfahrungsgegenstände um gleiche Verhältnisse zu- und abnehmen;

β) wenn Durchschnittswerthe zweier oder mehrerer Gegenstände gefunden werden sollen.

* Meistens sind die Aufgaben ersterer Art durch diskrete, die Aufgaben letzterer Art durch stetige Proportionen zu lösen.

b.

Rechnungen aus dem gemeinen bürgerlichen Leben, welche sich als geometrische Verhältnißrechnungen darstellen, sind:

α) Die Regel de Tri, d. i. die Rechnungsart, aus drei gegebenen Dingen, deren zwei unter sich gleichartig sind, ein viertes, das mit dem gegebenen dritten einerlei Art ist, durch Rechnung aufzufinden.

Zur Regel de Tri gehören:

Als besondere Arten (in Bezug auf ihre Auflösungsweise):

die Reesische Regel (sogenannt nach ihrem Erfinder, dem Holländer H. v. Rees);

die welsche Praktik;

* Die Regel de Tri und ihre Arten werden großentheils nur mechanisch eingelernt.

als Zusammensetzungen

die Regel de Quinque,

" " de Septem,

" " de Novem, ...

* In diesen Zusammensetzungen findet eine Anwendung. Zusatz 2. §. 111. 2.

β) die Social- Gesellschaftsrechnungen, d. i. jene Rechnungen, durch welche Bestimmungen geschehen

αα) entweder nach willkührlicher Annahme, oder

ββ) nach Gesetzen der Billigkeit.

* In diesen Rechnungen findet vorzüglich die Regel de Tri Anwendung.

γ) die Alligations- Mischungsrechnungen, in welchen bestimmt wird

αα) entweder der Preis aus gegebenen Preisen, oder

ββ) die verhältnißmäßige Hergabe der Realien, die gemischt werden sollen.

* Auch diese Rechnungen bedienen sich der Regel de Tri wie die Gesellschaftsrechnungen.

§. 114.

Erklärungen.

Bei der Uebertragung eines mathematischen Problems des bürgerlichen Lebens in die algebraische Sprache sind 3 Momente zu merken:

a) die Formation,
b) die Reduktion und
c) die Solution.

a.

Die Formation (sonst Ansatz genannt) ist die Bildung der Aufgabe aus den gegebenen Bedingungen und bekannten Eigenschaften der zu suchenden unbekannten Größe.

* Sie ist (als das Werk des selbstthätigen Verstandes) das Schwierigste, und weil bei verschiedenen Problemen verschieden, nicht leicht durch Regeln für alle Fälle zu lehren.

Vor der Formation von Proportionen für Probleme aus dem bürgerlichen Leben ist zu fragen,

α) ob die beiden gleichen Verhältnisse gerade, oder
β) ob die beiden gleichen Verhältnisse ungerade (verkehrt) sind.

α.

Größen sind einander gerade proportional, wenn mit einem Wachsen oder Abnehmen der einen auch ein Wachsen oder Abnehmen der andern verbunden ist. Die gerade Proportion spricht sich aus in der allgemeinen Formel:

„Je mehr — desto mehr; Je weniger — desto weniger...“ Z. B. Je mehr Waare, desto mehr Bezahlung; Je weniger Gewicht, desto weniger Bezahlung.

β.

Größen sind einander verkehrt proportional, wenn mit einem Wachsen oder Abnehmen der einen ein Abnehmen oder Wachsen der andern verbunden ist. Die ungerade Proportion spricht sich aus in der allgemeinen Formel:

„Je mehr — desto weniger; Je weniger — desto mehr...“ Z. B. Je mehr Arbeiter, desto weniger Zeit zur Vollendung dergleichen Arbeit; Je geringer das Kapital, desto mehr Zeit zu gleichen Zinsen.

b.

Die Reduktion ist jene Operation, durch welche dem zu lösenden Probleme, nach ihrer Formation, eine einfachere oder schicklichere Gestalt gegeben wird. Dieß geschieht z. B. durch Hinwegschaffung von Brüchen (§. 111. 2. Zusatz), durch Versetzung von Gliedern (§. 111. 1.) u. dgl.

c.

Die Solution oder endliche Reduktion ist jene Operation, wodurch die Aufgabe zu Ende gebracht oder völlig gelöst, d. i. der Werth für die zu suchende unbekannte Größe angegeben wird.

Der Solution wird zur Bewährung der richtigen Operation oft die Probe beigegeben. Diese besteht darin, daß man (in die erste Form) für die unbekannte Größe ihr gefundenes Aequivalent substituirt, worauf dann, wenn die Solution richtig geschehen ist, bei der arithmetischen Proportion „die Summe der äußern Glieder gleich ist der Summe der mittlern Gliedern,“ und bei der geometrischen „das Produkt der äußern Glieder gleich ist dem Produkte der mittlern Glieder.“

II. Artikel.

Von einigen benannten Größen.

§. 115.

Anmerkung.

Um Aufgaben, welche das civilisirte Leben diktiren kann, gehörig lösen zu können, ist es nöthig, die Verhältnisse, Größen und Werthe mehrerer (in den §§. 25 bis 32 noch nicht angegebenen) benannter Zahlen zu kennen, und zwar ist zu wissen nöthig

I. Einiges, was Zeitgrößen, und

II. Einiges, was Raumgrößen verständiget.

I.

In Bezug auf Zeitgrößen wird hier Gegenstand kurzer Erörterung

1) aus der allgemeinen Chronologie

das Grundjahr und der Jahresanfang,

die Aeren und Cykeln;

2) aus der Spezialchronologie
Einiges von den Zeitrechnungsarten
der Christen, und
der Griechen und Römer.

II.

In Hinsicht der Raumgrößen wird
1) das neue französische Maaß erklärt, werden
2) Tabellen mehrere benannte Zahlen verschiedener Orte und Länder angeben und zugleich näher bestimmen
a) durch das neue französische Maaß, welches unstreitig das beste Normalmaaß ist, und
b) durch die entsprechenden bayerischen Maaße.

§. 116.

Erklärungen.

I. Grundjahr und Jahresrechnung.

1) Für die Dauer des Jahres, welches als Grundmaaß (oder als Maaß) für die Zeitrechnungen dient, ist nicht immer gleich viel Zeitraum angenommen worden.

Man hat mehrere verschiedene (doch vorzüglich zwei berücksichtigte) Grundjahre, nämlich

a) das julianische Jahr, welches unter Numa Pompilius den Römern als Sonnenjahr von 365 Tagen Tagen gegeben, und auf Julius Cäsars Anordnung (um 44 vor Christus) durch den Alexandriner Sosigenes zu 365 Tagen 6 Stunden verbessert wurde, und

b) das gregorianische Jahr. — Da das julianische Jahr dem tropischen 11′ 8″ 54‴ vorschritt, was in 129 Jahren 1 Tag beträgt, so brachte Papst Gregor XIII. im Jahre 1582 eine Verbesserung zu Stande, an welcher Aloysius Lilius und der deutsche Christoph Clavius vorzüglichen Antheil hatten. Nach julianischer Einrichtung wurde nämlich alle vier Jahre ein Tag eingeschaltet (annus bissextilis); nach gregorianischer Anordnung darf von vier Sekularjahren erst das vierte ein Schaltjahr sein (die übrigen vierten Jahre sind wie in julianischer Ordnung Schaltjahre).

* Um vom Jahre des nicänischen Conciliums (vom Jahre 325) angefangen, nach dem neuen Stiele zu rechnen, zählte man im Jahre 1582 auf Befehl Gregors vom 4. gleich auf dem 15. Oktober.

** Diese Verbesserung fand nicht sogleich allgemeine Annahme. Cl. von Rotteck sagt: „Religiöse Abneigung verhinderte lange die allgemeine Annahme dieser einleuchtenden Verbesserung, und als sich endlich die Protestanten, spät genug, zum gregorianischen Kalender bequemten, so behielten sie dennoch eine eigene Bestimmung der von dem Mondcykel abhängenden Osterfeier bei. Die griechische Kirche blieb aber bis heute dem julianischen Jahre getreu, ...“

2) Der Jahresanfang ist verschieden bei verschiedenen Völkern (welche Verschiedenheit bei der Reduktion (§. 121) berücksichtiget werden muß).

II. Aere und Cykel.

1) Eine bestimmte Art und Weise, die Jahre in einer fortlaufenden (nicht wiederkehrenden) Reihe zu zählen, heißt Jahr-Zeit-Rechnung (Aera).

Der Anfang einer Aere heißt Epoche, Jahres-Rechnungs-Gränze.

2) Zeitkreis, Cyklus heißt eine wiederkehrende Reihe von Jahren, nach deren Vollendung dieselben wieder von Forne an gezählt werden.

§. 117.

Erklärungen und Angaben.

I. (aus der Chronologie der Christen).

Von den Christen sind vorzüglich zwei Aeren gebraucht

a) die christliche Zeitrechnung, welche die Geburt Christi, und

b) die Weltjahrrechnung, welche die Erschaffung der Welt zur Epoche hat.

a.

Die christliche Zeitrechnung (diese im engern Sinne) hat den römischen Abt Dionysius den Kleinen (530) zum Urheber, und erhielt (720) durch den englischen Benediktiner Beda, dem Ehrwürdigen, die noch bestehende Einrichtung.

Man zählt in dieser Aere von der Geburt Christi entweder

α) bis auf unsere Zeiten und die folgenden fort — Zeitrechnung nach Christi Geburt (post Ch. natum, p. Ch. n.) — oder

β) rückwärts auf die vorhergehenden Jahre bis zur Erschaffung der Welt — Zeitrechnung vor Christi Geburt (ante Ch. natum, a. Ch. n.) —

Zusatz. Die Erschaffung der Welt war { nach Jac. Usserius 4003 a. Ch. n, nach Kepler u. Petavius 3983 a. Ch. n. }

b.

Die Weltjahrrechnung (aera mundana, ab orbe (mundo) condito, a. m. c.) ist entweder

α) Alexandrinische (oder historische), welche von Erschaffung der Welt bis zu Christus 5502 Jahre rechnet, die mit dem 1. Sept. beginnen, oder

β) Antiochenische Weltjahrrechnung (Kirchenrechnung), welche a. m. c. bis Christus 5492 Jahre zählt, die ebenfalls mit dem 1. Sept. beginnen, oder

γ) Constantinopolitanische (oder bürgerliche) Weltjahrrechnung, welche von der Erschaffung der Welt bis Christus 5508 Jahre rechnet, die auch mit dem 1. Sept. anfangen.

Zusatz. Es ist der Unterschied
zwischen der bürgerl. und histor. = 5509 — 5503 = 6,
„ „ „ „ kirchl. = 5509 — 5493 = 16.

* Quelle für die Weltjahrrechnung ist vorzüglich die hl. Schrift.

* * *

Eine Schöpfungsäre ist die Aere der (neuen) Juden. In dieser ist die Weltschöpfung gesetzt auf den Helbst des Jahres 3761 vor dem ersten Jahre der christlichen Zeitrechnung. Der Anfang eines Jahres (Mond — Sonnenjahres) fällt um die Zeit der Helbstnachtgleiche.

II. (aus der Chronologie der Griechen und Römer).

1) Die Griechen hatten keine gemeinschaftliche bürgerliche Aere, jedes Volk rechnete die Jahre nach seinen Obrigkeiten, z. B. die Athenienser nach ihren Archonten, die Lace-

dæmonier nach ihren Ephoren u. s. w. Doch unter den Gelehrten bestanden einige Aeren, nämlich

a) die Aere von Zerstörung der Stadt Troja (1184 a. Ch. n.),

b) die Aere der Olympiaden,

c) die Attische Aere (= Chronik von Paros 264. a. Ch. n.),

d) die Callipische Aere (Callipische Periode = 19. 4 Jahre).

• Herodot rechnet nach Menschenaltern, deren drei ein Jahrhundert machen.

b.

Von den Olympiaden.

α) Eine Olympias heißt eine wiederkehrende Reihe von 4 aufeinander folgenden Jahren, wo im ersten Jahre jedesmal bei der Stadt Olympia von den Griechen die Spiele gefeiert wurden.

β) Diese Spiele dauerten 5 Tage, von welchen der letzte auf den nächsten Vollmond nach der Sommer-Sonnenwende fallen mußte.

γ) Die Epoche der Olympischen Jahresrechnung fällt auf den Sommer des Jahres 776. a. Ch. n., wo Koroibos zuerst als Sieger aufgeführt ist.

• Schon früher (Lykurg 888) fanden die Olympischen Spiele statt, wurden aber unterbrochen, von Iphitus 884. a. Ch. n. erneuert,... Gefeiert wurden diese Spiele bis zur 293sten Olympiade.

δ) Bei der Zeitrechnung nach Olympiaden wird nebst der Olympias noch die Zahl des Jahres vom Cykel angegeben; das erste Jahr des Cykels ist jedesmal das Jahr, in welchem die Spiele gehalten wurden, darauf folgen im Cykel bis zu der nächsten Olympiade noch drei Jahre, nämlich das zweite, dritte und vierte Jahr.

2) Die Grundäre der Zeitrechnung der Römer ist die Aere der Erbauung der Stadt Rom (aera seu annus urbis conditae, a. u. c.).

Die Epoche ist also das Jahr der Erbauung Roms, welches

M. T. Varro auf das 4. Jahr des 6. Olympias im Frühlinge, mithin auf 753 a. Ch. n.,

M. P. Cato aber auf das 1. Jahr der 7. Olympias, mithin auf 752 a. Ch. n. setzt.

* Durch die Veränderungen im römischen Staate ergeben sich drei aufeinander folgende Abtheilungen als Aeren, nämlich

a) die Aere der Könige (von 753 bis 509. a. Ch. n.),

b) „ „ „ Consulen (von 509 a. Ch. n. bis 541 p. Ch. n.)

c) „ „ „ Kaiser von 27 (a. Ch. n.)

** Nebst den angeführten und einigen andern Aeren kommen bei den Römern auch Cykeln vor, als

das Lustrum, ein Zeitraum von 5 Jahren,

das Säkulum, ein Zeitraum von 100 Jahren.

§. 118.

Das neue französische Maaß.

I. Erklärungen.

1) Das neue französische oder metrische Maaß ist dasjenige, in welchem die Grundeinheit, der Meter (Mètre) dem zehnmilliontesten Theile von dem nördlichen Quadranten des durch Paris gehen Erdmeridians gleich kommt (Fig. II. AN. §. 27. 1.).

2) Der Meter, welcher gleich ist 3·4263... bayer. Fuß (§. 27. 1); wird

I. in kleinere Theile zerlegt, oder

II. es werden mehrere Meters zusammengenommen, und somit neue Einheiten gebildet.

Wenn dem Worte „Meter" die lateinischen Sylben: Deci., Centi, Milli... vorgesetzt werden, so bilden diese neuen zusammengesetzten Worte die Unterabtheilungen vom Meter; wenn aber dem Worte „Meter" die griechischen Sylben: Deka, Hekto, Kilo,... vorgesetzt sind, so hat man Vervielfältigungen des Meters.

* Der Umstand, daß sämmtliche Untereintheilungen und Vervielfältigungen dekadisch fortschreiten, erleichtert die Reduktion höherer Einheiten auf niedrigere und umgekehrt dieser auf jene ungemein.

** Dieses neue französische Maaß heißt noch das natürliche, weil es sich auf die wirkliche Größe unserer Erdkugel gründet.

3) Der Meter ist gleich 443·2959... alten französischen Linien.

II. Uebersicht der metrischen Maaße und Gewichte.

1. Längenmaaße.

I. Eintheilung des Meters.

Ein Meter = 10 Decimeters (Fig. VI.),
Ein Decimet. = 10 Centimetres,
Ein Centimet. = 10 Millimetres ...; oder

Meter		Dcmtr.		Centimtr.		Millim.
1	=	10	=	100	=	1000,
		1	=	10	=	100,
				1	=	10; oder

Millim.		Centimet.		Dcmtr.		Meter.
1	=	0·1	=	0·01	=	0·001,
		1	=	0·1	=	0·01,
				1	=	0·1.

II. Vervielfältigungen des Meters.

Ein Dekameter = 10 Metres,
Ein Hektometer = 100 „
Ein Kilometer = 1000 „ u. s. w.

2. Flächenmaaß.

Eine Quadratfläche, deren Seite gleich ist einem Meter, heißt Are.

Eine Quadratfläche, deren Seite gleich ist einem Centimeter, heißt Centiare.

Eine Quadratfläche, deren Seite gleich ist einem Hektameter, heißt Hektare.

3. Körpermaaße.

Ein Kubikmeter heißt Stere;
Ein Kubikdecimeter heißt Litre;
Ein Dekaliter = 10 Litre,
„ Hektolitre = 100 „
„ Kilolitre (Stere) = 1000 „
„ Decilitre = 0·1 „
„ Centilitre = 0·01 „
„ Millilitre (Kubikcentimetre = 0·001 Litre.

4. Gewichte.

Das Gewicht eines Kubikcentimeters reinen Wassers (bei 2° 7 R) ist als Einheit für die französischen Gewichte angenommen und heißt Gramme.

Ein Zehntheil, Hunderttheil, Tausendtheil... davon heißt Decigramme, Centigramme, Milligramme..

Das Zehnfache, Hundertfache, Tausendfache... davon heißt Dekagramme, Hektogramme, Kilogramme..

§. 119.

Tabellen, welche benannte Zahlen verschiedener Orte und Länder bestimmen.

1. Längenmaaße.

Namen der Orte und Länder.	a) Name des Maaßes.	Französ. Meter.	Bayr. Fuß.	b) Name des Maaßes.	Französ. Meter.	Bayr. Ellen.
Aarau (Aargau) .	Fuß . .	0·300	1·028	Elle	0·954	0·715
Altenburg . .	Fuß . .	0·288	0·985	s. Leipzig . .	. .	. .
Altona, (s. Hamb.)						
Amsterdam (Holl.)	Fuß . .	0·283	0·970	Amsterd. Elle .	0·688	0·826
				Amstd. Brbt. E.	0·700	0·833
				Astd. Brügger E.	0 691	0·841
Anhalt Köthen u.				Köthener Elle .	0·636	0·763
Dessau . . .	s. Berlin .	. .	. .	Wollenelle . .	0·684	0·822
Antwerpen . .	Fuß . .	0·286	0·978	Leinwandelle .	0·802	0·962
Appenzell . . .	s. Berlin .	. .	. .	Wollenelle . .	0·616	0·739
Arolsen (Waldeck)	Fuß . .	0·292	1·001	Elle	0·585	0·702
Athen (Griechld.)	königl. Piki	1	3·426	königl. Piki .	1	1·2
Barcellona . .	. . . .	. .	. .	Canna . . .	1·581	1·898
Basel	Fuß . .	0·304	1·043	Große Elle .	1·179	1·415
				Kleine Elle .	0·539	0·648
Berlin (Preußen						
u. Rheinlande)	Fuß . .	0·314	1·075	Elle	0·667	0·800
Bern	Fuß . .	0·293	1·005	Elle	0·542	0·650
Braunschweig .	Fuß . .	0·285	0·977	Elle	0·570	0·684
Bremen . . .	Fuß . .	0·289	0·991	Elle	0·579	0·695
Brüssel (Belgien)	Alle Maaße und Gewichte wie Frankreich. Aeltere Lokalmaaße und Gewichte sind:					
	Brabt. Fuß	0·276	0·945	Brabant. Elle .	0·695	0·834
Bukarest . . .	. . . .	. .	. .	Tuch, Seidenelle	0·701	0·842
				Leinwandelle .	0·662	0·795
Cadiz (Sevilla) .	s. Madrid .	. .	. .	. . . . . .	. .	. .
Chur (Graubdt.)	Fuß . .	0·300	1·028	Elle	0·663	0·796
Coburg . . .	. . . .	. .	. .	Elle	0·586	0·704
Darmstadt . .	Fuß . .	0·25	0·857	Elle	0·548	0·657
Detmold (Lippe) .	Fuß . .	0·289	0·992	Elle	0·579	0·695

Namen der Orte und Länder.	a) Name des Maaßes.	Französ. Meter.	Bayr. Fuß.	b) Name des Maaßes.	Französ. Meter.	Bayr. Ellen.
Dresden . . .	Fuß . .	0·283	0·970	Elle	0·566	0·680
Emden . . .	s. Hannov.	. .	. .	Elle	0·679	0·815
Fiume (Kroatien)	Maaße u. Gewichte gesetzlich wie Wien.					
Florenz (Toskana)	Perche od. Canna .	2·918	9·998	Bracc. da Pann.	0·584	0·700
Frankfurt a. M. .	Fuß . .	0·285	0·975	Frankf. Elle .	0·547	0·657
				Brabanter Elle .	0·699	0·839
				Pariser Stab .	1·182	1·419
Freiburg in Baden	Fuß . .	0·317	1·085	Elle	0·538	0·646
Freiburg in der Schweiz . .	Fuß . .	0·293	1·005	Ellenstab . .	1·069	1·284
Genf	Fuß . .	0·488	1·672	Paris. Aune, w. Paris . . .	. .	. .
				Genfer Aune .	1·144	1·373
Genua	Canna .	2·498	8·559	Palmo . . .	0·249	0·299
Gera (Reuß) .	Fuß . .	0·286	0·980	Elle	0·572	0·867
Gotha	Fuß . .	0·288	0·985	Elle	0·563	0·675
Hamburg . . .	Fuß . .	0·286	0·982	Hamburger Elle	0·573	0·688
				Brabant. Elle .	0·691	0·830
Hannover . . .	Fuß . .	0·292	1·001	Elle	0·584	0·701
Heidelberg . .	Fuß . .	0·279	0·957	Elle	0·559	0·670
Herrmannstadt . .	. . . .	. .	. .	Elle	0·623	0·748
Karlsruhe . . .	Fuß . .	0·300	1·028	Elle	0·600	0·720
Kassel	Fuß . .	0·288	0·986	Elle	0·570	0·685
				Brabant. Elle .	0·694	0·833
Kiel (Holstein) .	Fuß Altona					
Konstantinopel .	. . . .	. .	. .	Pik, groß .	0·305	0·803
				„ klein .	0·432	0·777
Kopenhagen . .	Fuß . .	0·314	1·075	Elle (Alen) . .	0·628	0·753
Krakau	Fuß. Stopa	0·356	1·221	Elle (Lokiec) .	0·617	0·740
Lausanne (Waadt)	s. Baden .	. .	. .	Elle doppelt so groß wie in Baden.		
	s. Bern, Freiburg und Solothurn.			Elle	1·076	1·292
Lemberg (Galliz.)	Fuß . .	0·297	1·017	Elle	0·594	0·713
Leipzig . . .	Fuß . .	0·283	0·968	Elle	0·565	0·679
				Brabant. Elle .	0·685	0·823
Lissabon . . .	Baufuß .	0·339	1·162	Elle (Vara) .	1·097	1·317
London (Großbr.)	Fuß (Foot)	0·305	1·044	Imperial Standard Yard . .	0·914	1·098
Lübeck	Fuß . .	0·288	0·986	Elle	0·576	0·691
Lucca	Fuß . .	0·590	2·021	Elle (Braccio)	0·595	0·714
Luxemburg, s. Holl.						
Luzern	s. Berlin .	. .	. .	Elle	0·628	0·755
Madrid . . .	Castillian. Fuß (Pies)	0·283	0·968	Castilian. Elle (Vara) . .	0·848	1·018
Mailand . . .	Fuß . .	0·436	1·491	Elle (Braccio)	0·595	0·719
Mainz	Ordin. Fuß	0·314	1·075	Elle	0·551	0·661
Mannheim . .	Stadtfuß .	0·289	0·989	Elle	0·558	0·670

Namen der Orte und Länder.	a) Name des Maaßes.	Französ. Meter.	Bayr. Fuß.	b) Name des Maaßes.	Französ. Meter.	Bayr. Ellen.
Meiningen . .	. . . .	. .	. .	s. Anhalt . .	. .	. .
Messina . . .	Fuß . .	0·242	0·829	Elle (Canna) .	2·113	2·537
Modena . . .	Piede di Modena	0·634	2·173	Braccio di Modena . . .	0·648	0·778
	Piede di Reggio .	0·518	1·774	Braccio di Reggio	0·529	0·636
München . . .	Fuß . .	0·292	1	Elle	0·833	1
Neapel	Fuß Palmo	0·264	0·903	Elle (Canna) .	2·109	2·532
Neuenburg (Neufchâtel) .	s. Bern und Freiburg		. .	Elle (Aune) .	1·111	1·338
Nürnberg . . .	Fuß . .	0·304	1·041	Elle	0·656	0·788
Oldenburg . .	Fuß . .	0·296	1·016	Elle	0·581	0·697
Osnabrück . .	Fuß . .	0·279	0·957	Osnabr. Elle:	. .	. .
				Brabanter . .	0·691	0·830
				Pariser Stab .	1·187	1·425
				Aune zur Seide	1·191	1·429
				Aune z. Linnen	1·182	0·877
				Leinwandelle .	0·638	0·766
				Legge-Elle . .	1·222	1·467
				Calenberger:		
				Handelselle . .	0·637	0·765
				Legge-Elle . .	0·585	0·702
Palermo . . .	. . . .	. .	. .	Elle (Canna) .	1·942	2·332
Paris (Frankreich)	Meter .	1	3·426	Meter . . .	1	1·200
	Alt Par. Fß.	0·325	1·113	Nouvelle Aune	1·2	1·441
				Alte Aune . .	1·188	1·427
Parma und Guastalla	Braccio di legno .	0·542	1·086	Seiden-Braccio	0·594	0·714
				Wollen-Braccio	0·644	0·773
Prag	Fuß . .	0·296	1·016	Elle	0·594	0·713
Preßburg (Ung.)	s. Wien .	. .	. .	s. Wien . . .	. .	. .
Ragusa (Dalmat.)	s. Wien .	. .	. .	Elle	0·513	0·616
Rom	Bau Canna	2·233	7·652	Canna . . .	2·002	2·403
Rostock (Mecklenburg-Schwerin)	s. Lübeck und Berlin		. .	Rostocker Elle .	0·575	0·691
Schaffhausen . .	Fuß . .	0·298	1·020	Wismarer Elle .	0·582	0·699
Solothurn . .	s. Freiburg	. .	. .	Elle	0·596	0·715
				Elle	0·546	0·655
St. Gallen . .	Fuß . .	0·307	1·051	Stab . . .	1·182	1·419
				Gem. Wollenelle	0·611	0·734
				Klein. Wollenell.	0·606	0·727
				Gr. Leinwandell.	0·735	0·882
				Kl. Leinwandelle	0·730	0·877
St. Petersburg (Rußland) . .	s. London und Berlin		. .	Pariser Stab .	1·179	1·415
				Arschin . . .	0·711	0·854
Stockholm (Schweden) . .	Fuß . .	0·297	1·017	Elle	0·594	0·713
Strelitz . . .	s. Mecklenburg-Schwer.			. . . . . .	. .	. .
Stuttgart (Würtemberg) . .	s. Hamburg	. .	. .	Elle	0·614	0·737

Namen der Orte und Länder.	a) Name des Maaßes.	Französ. Meter.	Bayr. Fuß.	b) Name des Maaßes.	Französ. Meter.	Bayr. Ellen.
Tessin	. . . .	. .	. .	Braccio lugno	0·679	0·815
				Braccio piccol.	0·526	0·632
Thurgau, s. Appenzell.						
Triest (Illyrien) .	. . . .	. .	. .	Seidenelle . .	0·642	0·771
				Wollenelle . .	0·677	0·812
Turin (Sardin.) .	Piede manuale .	0·343	1·173	Raso	0·599	0·719
	Piede liprando .	0·514	1·759			
Unterwalden .	. . . .	. .	. .	Elle (Braccio) .	0·570	0·683
Valencia . . .	. . . .	. .	. .	Elle (Vara) .	0·930	0·117
Venedig . . .	Fuß . .	0·348	1·191	Seidenelle . .	0·638	0·706
				Wollenelle . .	0·681	0·818
Wallis, s. Waadt						
Warschau (Polen)	Fuß Stopa	0·288	0·987	Elle (Lociek) .	0·576	0·691
Weimar . . .	Fuß . .	0·282	0·966	Elle	0·564	0·677
Wien (österreich. Staaten) . .	Fuß . .	0·316	1·083	Elle	0·779	0·935
Wiesbaden (Nass.)	Fuß . .	0·287	0·984	Elle	0·555	0·667
Zürich, so wie Schwyz, Uri und Zug	s. Aarau .	. .	. .	s. Aarau . .	. .	. .

2. Flächenmaaß.

Name der Orte und Länder.	Name des Maaßes.	Franz. Ares.	Bayr. Morg.
Aarau, s. Bern.			
Amsterdam (Holland) . .	Morgen, 600 □Ruthen .	81·286	2·3857
	Bunder, 100 □Ruthen . .	100	2·9349
Antwerpen	Bunder 4 jour	130·49	3·829
Athen	königl. Stremma	10	0·2935
Basel	Jauchert	31·965	0·9381
Berlin (Preußen u. Rheinl.)	Morgen	25·532	0·7493
Bern	Jauchert, Acker . . .	34·392	1·009
	Jauchert, Holz	38·785	1·138
Braunschweig	Morgen	25·016	0·7342
Darmstadt	Morgen	24·999	0·7337
Detmold (Lippe) . . .	Morgen	25·789	0·7557
Dresden	Acker, 2 Morgen . . .	55·124	1·618
Emden	Diemt	56·733	1·665
Florenz (Toscana) . . .	Stioro	58·469	1·716
	Saccato	28·577	0·839

Name der Orte und Länder.	Name des Maaßes.	Franz. Ares.	Bayer. Morg.
Genf	Pose, 400 □Toises	27·013	0·793
Gera (Reuß)	Scheffel, 120 □Ruthen	24·516	0·7195
Gotha	Waldacker, 160 □Waldruth.	33·884	0·9944
	Feldacker, 140 □Feldruthen	22·7	0·6662
Hamburg	Morgen	96·512	2·832
	Scheffel, Saatland	42·023	1·233
Hannover	Morgen	26·210	0 7692
Heidelberg	Morgen, 4 Viertel, 160 Ruth.	37·737	1·107
Karlsruhe	Morgen	36	1·0566
Kassel	Acker	23·865	0·7004
Kopenhagen	Tonne, Hartkorn	38·503	1·130
	Tonne, Saatkorn	55·584	1·631
Lausanne (Waadt)	Pose, (Jauchart)	45	1·3207
Leipzig	Acker, 300 □Ruthen	55·132	1·6181
Lissabon	Acker Geira	58·258	1·7098
London (Großbrittanien)	Acre	40·443	1·1869
Luzern	Großes Jauchart	44·298	1·300
Madrid	Fanegada	45·948	1·3485
	Aranzada, für Weinberge	38 652	1·1344
Mailand	Pertica	7 5065	0·220
München	Tagwerk	34 073	1
Neapel	Moggia	33·427	0·9810
Nürnberg	Acker	21·274	0·6244
	Morgen	47·275	1·3875
Oldenburg	Juck (neues Maaß)	45·473	1·334
Paris	Hektare	100	2·9349
	Arpent. ord.	34·188	1·003
	Arpent légal (des eaux et forets)	51·072	1·499
	Arpent commun	42·128	1·236
Rom	Rubbio, 4 Quart, 7 Pezze	184·75	5·422
Rostock (Mecklenb. Schwer.)	Morgen 300 □Ruthen	65·031	1 909
St. Petersburg (Rußland)	Desätine	1·0932	3·2085
Stockholm (Schweden)	Tonne, Aussaat	49·354	1·448
Stuttgart (Würtemberg)	Morgen	31·517	0·9250
Turin (Sardinien)	Giornata	38 009	1·1155
Venedig	Yugada, 6 Cahizadas, 6 Fanegadas	249·18	7·3132
Warschau (Polen)	Morgen	55·988	1·6461
Weimar	Acker	28·497	0·8364
Wien (österreich. Staaten)	Joch	57·554	1·6892
Wiesbaden (Nassau)	Steuermorgen, 100 □Ruth.	24·970	0·733
Zürich, so wie Schwyz, Uri	Juchart, Acker	32·400	0·951
und	Juchart, Holz	36·000	1·057
Zug	Juchart, Rebwiesen	28·800	0·845

5. Hohlmaaße.

Name der Orte und Länder.	a) Flüssigkeitsmaaß. Name.	Franz. Hektoliter.	Bayr. Eimer.
Aarau (Aargau) . . .	Saum, 100 Maaß, 4 Schopp.	1·4406	2·2459
Altenburg	Eimer, 40 Kannen, 2 Maaß, 2 Nößel	0·6784	1·0577
Altona s. Hamburg.			
Amsterdam (Holland) . .	Ahm, 4 Anker, 2 Steckan, 8 Stoop, 2 Mingeln, 2 Pinten, 4 Müsjes . . .	1·5522	2·4200
Antwerpen s. Brüssel.			
Appenzell	Eimer, 4 Vierel, 8 Maaß	0·4189	0·6532
Arolsen (Waldeck) . . .	Ohm, 16⅔ Eimer, 6 Maaß	1·4282	2·2226
Athen	Königl. Hektoliter . . .	1	1·559
Barcellona	Carga, 16 Cortanes, 2 Quarteras, 3 Mitadellas	1·0920	1·7025
Basel	Saum, 3 Ohm, 8 Viertel, 4 alte oder 5 neue Wirths-Pot oder Maaß . . .	1·3652	2·1283
Berlin (Preußen u. Rheinl.)	Eimer, 60 Quart . . .	0·6970	1·0711
Bern	Saum, 4 Brenten, 25 Maaß, 4 Vierteli	1·6712	2·6055
Braunschweig	Orthoft, 40 Stübchen, 4 Quartier	2·2057	3·4388
Bremen	Ahm, 45 Stübchen, 4 Quart, 4 Mingeln	1·4496	2·2601
Brüssel (Belgien) . .	Both Wein, 152 Stoop, 2 Pot	1·374	2·1422
Bukarest	Eimer Viadra, 10 Occa .	0·1415	0·2206
Chur (Graubündten) . .	Zuber, 10 Viertel, 8 Maaß, 4 Quart	1·0632	1·6576
Darmstadt	Ohm, 20 Viertel, 4 Maaß, 4 Schoppen . . .	1·5614	2·4343
Detmold (Lippe) . . .	Ohm, 108 Kannen, 4 Ort	1·4863	2·3172
Dresden	Wein-Eimer, 48 Visirkannen	0·6743	1·0513
Emden, s. Amsterdam.			
Fiume (Kroatien) . . .	Orna, für Wein	0·5390	0·8404
Florenz (Toscana) . . .	Barile da vino, 20 Fiaschi	0·4558	0·7107
	Barile da olio, 16 Fiaschi	0·3343	0·5212
Frankfurt a. M. . . .	Ohm, 20 Viertel oder 80 Altmaaß oder 90 Jungmaaß, 4 Schoppen . .	1·4343	2·2362
Freiburg in Baden . .	Saum, 20 Viertel, 4 Maaß, 4 Schoppen	1·3210	2·0596
Freiburg in der Schweiz .	Brente, 25 Maaß, 4 Schoppen	0·3905	0·6086
Genf	Char, Fuder, 12 Setiers, 24 Quarterons, 2 Pots . .	5·4844	8·5504
Genua	Mezzarola, (Wein), 2 Barilli	1·4846	2·3145
	Barillo, für Oel . . .	0·6467	1·0082
Gera (Reuß)	Eimer, 72 Kannen . . .	0·6635	1·0344
Gotha	Eimer, 40 Kannen, 8 Maaß, 2 Nößel	0·7277	1·1345

Name der Orte und Länder.	a) Flüssigkeitsmaaß. Name.	Franz. Hektoliter.	Bayr. Eimer.
Hamburg	Ahm, 4 Anker oder 5 Eimer, 4 Viertel, 2 Stübchen, 2 Kannen, 2 Quart . .	1·4481	2·2576
Hannover	Ohm, 4 Anker, 10 Stübchen, 2 Kannen	1·5576	2·4284
Heidelberg	Die kleine Ohm, 12 Viertel, 4 Eichmaaß, 4 Schoppen .	0·9654	1·5057
Hermannstadt	Eimer (Ur=)	0·1132	0·1765
Karlsruhe	Ohm, 10 Stützen, 16 Maaß, 10 Gläser	1.1347	2·3386
Kassel	Ohm, 20 Viertel, 4 Maaß, 4 Schoppen	1·5596	2·4315
Konstantinopel	Alma	0·5496	0·080
Kopenhagen	Weinahm, 4 Anker, 155 Päle	1·4973	2·3344
	Viertonne, in ½, ⅛ u. $\frac{1}{8}$ getheilt	1·3140	2·0485
Krakau	Beczka, 36 Garniec, 4 Kwart	1·3650	2·1287
Lausanne (Waadt) . . .	Char, 16 Setiers, 3 Brocs, 10 Pots	6·4800	10·103
Lemberg (Gallizien) . .	Bierfaß, 36 Garnitz, 4 Quart	1·3836	2·1573
Leipzig	Eimer, 54 Visirkannen, 2 Nößel, 4 Quartier . .	0·7586	1·1826
Lissabon	Pipa, 26 Almudas, 2 Alqueiras, 6 Canhados, 4 Quartill.	4·3529	6 7864
London (Großbrittanien) .	Imperial Standart Gallon, 4 Quarts	4·5410	0·0708
Lübeck	Ahm, 20 Viertel, 2 Stübchen, 2 Kannen, 2 Quartier, 2 Plank.	1·4481	2·2576
Luzern	Saum, 3⅓ Ohm, 4 Schoppen	1·7281	2·6943
Madrid	Cantura, f. Wein, 8 Acumbr.	1·5746	0·2455
	Arroba menor, für Oel .	1·2297	0·1917
Mailand	Brenta, 3 Staja, 2 Mine, 2 Quartari, 4 Pinte, 2 Bocali	0·7555	1·779
Mainz	Ohm, 20 Viertel, 4 Maaß, 4 Schoppen	1·3558	2·1133
Mannheim	Die große Ohm, 20 Viertel, 4 Maaß, 4 Schoppen .	1·5952	2·4870
Meiningen	Ohm, 2 Eimer, 32 Schenkmaaß	0·6545	1·0204
Messina	Salma, 8 Quartari, 12 Quartucci	0·8760	1·3657
Modena	Barile, 20 Fiaschi, 2 Boccali	0·4160	0·6495
München	Schenkeimer, 60 Mß., 4 Quart	0·6414	1
	Biereimer, 64 Schenkmaaß .	0·6842	1
Neapel	Barile, 60 Caraffe . . .	0·4362	0·6801
Neuenburg (Neufchâtel) .	Muid, 192 Pots	3·6562	5·7000
Oldenburg	Anker, 26 Weinkannen . .	0·3817	0·5950
Osnabrück	Ahm, für Wein, 28 Viertl, 4 Kannen, 4 Ort, 4 Helfchen	1·3663	2·1301
	Tonne, für Bier, 27 Viertel, 4 Kannen	1·3175	2·0540
Paris (Frankreich) . .	Der Hectoliter	1	1·5590

Name der Orte und Länder.	a) Flüssigkeitsmaaß. Name.	Franz. Hektoliter.	Bayr. Ellen.
Prag s. Wien.			
Preßburg (Ungarn) . .	Eimer, 64 Icze, 2 Mezzely	0·5334	0·8317
Ragasu (Dalmat.) s. Wien.			
Rom	Barilo, für Oel	0·5311	0·8280
	Barilo, für Wein, 4½ Rubbi	0·4551	0·7096
Rostock (Mecklenb.-Schw.) s. Lübeck.			
Schaffhausen	Eimer, 4 Viertel, 8 Maaß	0·4206	0·6558
Solothurn	Saum, 4 Brenten, 5 Stützen, 2 Becher oder 5 Maaß .	1·5942	2·4854
St. Gallen	Eimer, 4 Viertel, 8 Maaß, 4 Schoppen	0·4199	0·6546
St. Petersburg (Rußland)	Wedro, 4 Tschetwerki .	0·1229	0·1916
Stockholm (Schweden) .	11 Weinahm, 2 Eimer, 2 Anker, 15 Kannen, 3 Stoop . .	1·5711	2·4494
	Tonne, 48 Kannen, 2 Stoop, 4 Quartier, 4 Jungfern .	1·2568	1·9595
Stuttgart (Würtemberg) .	Eimer Helleich, 16 Imi, 10 Maaß	2·9593	4·5825
Tessin s. Mailand.			
Triest (Illyrien) . . .	Orna di vino, 36 Boccali	0·6566	1·0236
Turin (Sardinien) . .	Carro, für Wein 10 Brente. 36 Pinte, 2 Boccali, 2 Quartini	4·9285	7·6837
Valencia	Carga, 15 Arrobas, 4 Quartos, 2 Med. . .	1·0114	2·6580
Venedig	Biconzia, für Wein, 2 Conzi, 24 Boccali	1·5861	2·4728
Warschau (Polen) . . .	Faß, (Beczka), 25 Garniec, 4 Kwarti	1	1·5590
Weimar	Eimer, 72 Maaß, 2 Nößel	0·7330	1·1428
Wien (österr. Staaten) .	Wein-Eimer, 40 Rechnungsmaaß	0·5802	0·9045
	Bier-Eimer, 42½ Maaß .	0·5988	0·9376
Wiesbaden (Nass.) s. Mainz.			
Zürich, so wie Schwyz, Uri und Zug	1[1] Wein-Eimer, 4 Viertel, 7½ Kopf	1·0950	1·7072

Name der Orte und Länder.	b) Fruchtmaaß. Name.	Franz. Hektoliter.	Bayr. Schffl.
Aarau (Aargau)	Malter, 4 Mütt, 4 Vrtl, 4 Vrlg	3·6030	1·6204
Altenburg	Scheffel, 4 Viertel, 4 Metzen, 4 Mäßchen	1·4062	0·6324
Amsterdam (Holland)	Last Korn $21\frac{3}{5}$ Tonnen oder 27 Mudde, 4 Schepel; 5 Sch. = 1 Sack, der Sack	0·8344	0·3753
Anhalt Köthen und Dessau	Köthener Scheffel	0·5296	0·2382
Antwerpen	Last, $37\frac{1}{2}$ Vrtl, 4 Mudde = 1 Vrtl	0·7962	0·3552
Appenzell	Mütt, 4 Viertel	0·9137	0·4109
Arolsen (Waldeck)	Scheffel	0·5142	0·2312
Athen (Griechenland)	königl. Kilo	1	0·4497
Barcellona	Quartera, 12 Cortanes, 4 Picotins	0·6798	0·3056
Basel	Sack, 4 große Sester, 2 kleine Sester, 4 Köpfli, 2 Becher	1·3666	0·6146
Berlin (Preußen u. Rheinl.)	Scheffel, 16 Metzen, 3 Quart	0·5496	0·2472
Bern	Mütt, 12 Mäß, 2 Mäßli, 2 Immi, 2 Achterli, 2 Sechszehn.	1·6815	0·7561
Braunschweig	Scheffel, 10 Himten, 4 Vierfaß, 4 Becher	3·1044	1·3961
Bremen	Scheffel	0·7407	0·3331
Brüssel (Belgien)	Sack	1·1662	0·5244
Bukarest	Kile, 2 Mirze, 8 Demerli, 16 Occa	3·9680	1·7701
Cadiz (Sevilla)	Cahiz, 12 Fanega; die Faneg	0·5634	0·2533
Chur (Graubündten)	Lädi, 8 Mütt, $5\frac{1}{2}$ Viertel, 4 Quartanen, 4 Mäßlein	13·197	5·9350
Coburg	Korn: Simra, 4 Vrtl., 4 Metz.	0·8895	0·4000
	Hafer: Simra	1·1044	0·4967
Darmstadt	Malter, 4 Simmer, 4 Kumpf, 4 Gescheid	1·1233	0·5051
Detmold (Lippe)	Malter, 24 Scheffel, 4 Spint, 4 Becher	0·4431	0·1993
Dresden	Scheffel, 4 Viertel, 4 Metzen, 4 Mäßchen	1·0390	0·4673
Emden	Last, 15 Tonnen, 2 Sack, 2 Verps, 1 Verps	0·4984	0·2242
Fiume (Kroatien)	Metze	0·6316	0·2840
Florenz (Toskana)	Staja, 2 Mine, 2 Quarti, 12 Metadelli, 2 Quartucci	0·2436	0·1096
Frankfurt a. M.	Malter, 4 Simmer, 2 Mester, 2 Sechter, 4 Gescheid, 4 Mäßchen, 4 Schrott	1·1474	0·5160
Freiburg in Baden	Viertel, 6 Sester, 4 Vierl.	1·0928	0·4914
Freiburg in der Schweiz	Sack, 6 Mäß, 2 Quart, 6 Immi	1·2774	0·5745
Genf	Sack (Coupe)	0·7766	0·3493
Genua	Mina, 8 Qnarti, 12 Gombette	1·1673	0·5250
Gera (Reuß)	Scheffel, 4 Viertel, 4 Maaß	1·0616	0·4773

Name der Orte und Länder.	b) Fruchtmaaß. Name.	Franz. Hektoliter.	Bayr. Schffl.
Gotha	Malter, 2 Schffl, 2 Vrtl, 2 Mtz.	0·8732	0·3927
Hamburg	Scheffel, 2 Faß, 2 Himten, 4 Spint, 4 große oder 8 kleine Maaß	1·0557	0·4739
Hannover	Malter, 6 Himten, 4 Metzen	1·8691	0·8400
Heidelberg	Malter, für glatte Frucht .	1·1140	0·5010
	Malter, für rauhe Frucht .	1·2552	0·5636
Hildburghausen	Malter, für Waizen, Korn ꝛc.	2·0694	0·9306
	Malter, für Gerste, Hafer und Dinkel	2·3950	1·0921
Karlsruhe	Malter, 10 Sester, 10 Mäßl.	1·2852	0·6746
Kassel	Viertel, 16 Metzen, 4 Becher	1·6074	0·7232
Konstantinopel	Fortin, 4 Kiloz	1·7039	0·652
Kopenhagen	Korntonne, 8 Scheffel . .	1·3900	0·6254
Krakau	Korzek, 4 Cwierci. 8 Garcy	1·2010	0·5401
Lausanne (Waadt) . . .	Sac, 10 Quater., 10 Emines	1·3500	0·6071
	Aeltere noch vorkommende Maaße u. Gewichte:		
	Muid, 12 Quart; das Quart	0·1373	0·0617
Lemberg (Gallizien) . .	Korzek, ist genau 2 Wiener Metzen		
Leipzig	Scheffel, 4 Viertel, 4 Metzen, 4 Mäß	1·0743	0·4832
Lissabon	Fanega, 4 Alqueir., 4 Quart.	0·5403	0·2445
	Mojo (Salzmaaß)	8·0337	3·6129
London (Großbrittanien) .	Last, 2 Tons, 5 Quarters; der Quarter	2·9078	1·3077
	Winchester Bushel, 8 Gallons	1·0353	0·1586
	Chaldron	13·081	5·8829
Lübeck	Roggen: Scheffel, 4 Faß .	0·3558	0·1600
	Hafer: Scheffel	0·3963	0·1782
Lucca	Stajo	0·2452	0·1103
Luzern	Mütt, 4 Viertel . . .	1·3901	0·6252
Madrid	Cahiz, 12 Fanegas, 12 Almudes, 4 Quartillos; die Fan.	0·5715	0·2570
Mailand	Moggio, 8 Staja, 4 Quartari, 4 Mete, 4 Quartani .	1·4623	0·6577
Mainz	Malter, 4 Virnsel, 4 Kümpfe	1·0906	0·4905
Mannheim	Malter, für glatte Frucht .	1·1108	0·4996
	Malter, für rauhe Frucht .	1·2496	0·5620
Meiningen	Maaß (Urmaaße fehlen) .	2·0884	1·0939
Messina	Salma grossa, 16 Tomoli, 4 Quarti	3·4436	1·5487
	alma generale, 16 Tomoli, 4 Quarti . . .	2·7680	1·2448
Modena	Stajo (Staja, Stara) . .	0·7024	0·3159
München	Scheffel, 6 Metzen, 2 Viertel, 4 Mäßel, 4 Dreißiger .	2·2236	1
Neapel	Tomolo, 2 Mezetti, 2 Quarti, 2 Stopelli, 3 Misure .	0·5523	0·2484
Neuenburg (Neufchâtel) .	Muid, 3 Sacs, 8 Emin., 8 Pots	3·6562	1·6434

Name der Orte und Länder.	b) Fruchtmaaß. Name.	Franz. Hektoliter.	Bayr. Schffl.
Nürnberg	Metzen, für glatte Frucht .	0·1988	0·0894
	Hafer: Simra; für rauhe Frucht: 4 Malter . .	0·1839	0·0827
Oldenburg	Tonne, 8 Scheffel . . .	1·7823	0·8015
Osnabrück	Scheffel, 4 Viertel, 4 Becher	0·2870	0·1291
Palermo	Wie Messina.		
Paris (Frankreich) . . .	Der Hektoliter	1	0·4497
	Boisseau, mit Unterabtheilungen von ½ und ¼ . .	0·1301	0·0585
Parma und Guastalla . .	Staro (Stajo), 16 Quartari	0·5142	0·2312
Prag	Strich, 4 Vrtl, 4 Mß., 12 Seidl	0·9360	0·4210
Preßburg (Ungarn) . .	Metzen (Kila)	0·5334	0·2399
Ragusa (Dalmatien) s. Wien.			
Rom	Rubbio, für glatte Frucht 4 Quartos	2·6724	1·2018
	Rubbio, für Hafer 14⅔ Scorzi	2·4619	1·1072
Rostock (Mecklenb. Schwer.)	Kornscheffel	0·3889	0·1749
Schaffhausen	Malter, für glatte Frucht 2 Mütt	1·8082	0.8132
	Malter, für rauhe Frucht 4 Mütt	4·0758	1·8330
Solothurn	Mütt, 1½ Vrtl., 4 Doppelmäß, 2 Mäß, 2 Halbmäß, 2 Vierteln	1·0595	0·4765
St. Gallen	Malter, 2 Mütt, 4 Viertel, 4 Vierling oder Mäßli .	1·6519	0·7429
St. Petersburg (Rußland)	Tschetwert, 2 Osnin 2 Pajok	2·0974	0·9433
Stockholm (Schweden) .	Tonne, ohne Gutmaaß . .	1·4651	0·6589
	" für Roggen rc. . .	1·6484	0·7413
	" " Malz	1·7398	0·7825
	" " Salz und Kalk .	1·5568	0·7001
Strelitz	Scheffel	0·5165	0·2323
Stuttgart (Würtemberg) .	Scheffel, 8 Simri, 4 Vierling, 8 Ecklein	1·7723	0·7971
Tessin	Star	0·1978	0·0889
Triest (Illyrien) . . .	Staro, 3 Poliniki . . .	0·7409	0·3332
Turin (Sardinien) . .	Sacco, 5 Emine, 8 Coppi, 24 Cuchiari	1·1503	0·5173
Unterwalden	Wie Luzern.		
Valencia	Cahiz, 12 Barcell., 4 Celem.	1·9989	0·8989
Venedig	Moggio, 4 Staja, 4 Quarte, 4 Quartaruole . . .	0·8486	0·3816
Warschau (Polen) . . .	Korzec, 4 Viertel, 8 Garnitz	1·2800	0·5757
Weimar	Scheffel, 4 Viertel, 4 Metzen	0·7696	0·3461
Wien (österreich. Staaten)	Metzen, 4 Viertel, 2 Achtel, 2 Maßl 2 Hlbmaßl 2 Futtermßl.	0·6150	0·2766
Wiesbaden (Nass.) s. Mainz.			
Zürich, so wie Schwyz, Uri und	Mütt, z. glatten Frucht 4 Vrtl.	0·8212	0·3693
	" z. rauhen Frucht 4 Vrtl.	0·8328	0·3745
Zug	Korn: Mütt, 4 Vrtl, 4 Vierlg.	0·8979	0·4038
	Hafer: Malt., 4 Mütt, 4 Vrtl.	3·6089	1·6230

4. Gewicht.

Name der Orte und Länder.	Name des Gewichtes.	Franz. Kilogramm	Bayr. Pfund.
Aarau (Aargau) . . .	Handelspfund, 32 Loth .	0·4766	0·8510
Altenburg	Handelspfund, 32 Loth .	0·4665	0·8330
Amsterdam (Holland) . .	Handelspfund, 16 Unzen oder 32 Loth, 4 Drachmen .	0·4941	0·8823
Antwerpen	Altes Handelspfund . . .	0·4701	0·839
	Das schwere Pfund, 40 Loth	0·5846	1·0440
Appenzell	Das leichte Pfund, 32 Loth	0·4651	0·8306
Arolsen (Waldeck) . . .	Das schwere Pfund . . .	0·4763	0·8506
	Das leichte Pfund	0·4674	0·8347
Athen	Kgl. Mine à 1500 Drachmen.	1·5	2·6786
Barcellona	Pfund, 12 Oncas, 4 Quartas, 4 Adermes	0·4007	0·7141
Basel	Großes Eisenpfund, 32 Loth	0·4932	0·8808
	Kleines Eisenpfund, 32 Loth	0·4802	0·8576
Berlin (Preußen u. Rheinl.)	Handelspfund, 32 Loth, 4 Qnt.	0·4677	0·8352
Bern	Eisenpfund, 32 Loth, 4 Quent, 4 Pfennige	0·5200	0·9286
Braunschweig, s. Berlin.			
Bremen	Handelspfund, 32 Loth, 4 Qnt.	0·4985	0 8902
Brüssel (Belgien) . . .	Pfund	0·4677	0·8351
Bukarest	Occa, 4 Littre, 100 Dram	1·2889	2·3018
Chur (Graubündten) . .	Das schwere Pfund, 36 Loth	0·5204	0·9293
	Das leichte Pfund, 32 Loth	0·4626	0·8261
Coburg	Handelspfund	0·5098	0 9105
Darmstadt, s. Paris.			
Detmold (Lippe) . . .	Sogen. Kölnisches Pfund .	0·4674	0·8347
Dresden	Pfund, 32 Loth, 4 Quentchen	0·4669	0·8338
Emden, s. Berlin.			
Fiume (Kroatien) . . .	Handelspfund, 32 Loth .	0·5588	0·9978
Florenz (Toscana) . . .	Handelspfund, 12 Oncie .	0·3395	0·6063
Frankfurt a. M. . . .	Das schwere Pfund . . .	0·5053	0·9024
	Das leichte Pfund	0·4679	0·8356
Freiburg in Baden . .	Pfund Trockengewicht, 32 Lth.	0·5025	0·8452
Freiburg in der Schweiz .	Eisenpfund, 16 Unzen, 4 Qtchn	0·5288	0·9443
Genf	Handelspfund (gros poids)	0·5507	0·9854
	Kleines Pfund (petit poids)	0·4589	0·8195
Genua	Handelspfund, 100 Rotoli .	0·3487	0·6227
	Libra peso sottile, 12 Oncie	0·3169	0·5660
	Libra, zur rothen Seide .	0·3432	0·6128
Gera (Reuß), s. Leipzig.			
Gotha	Pfund, 32 Loth	0·4674	0·8347
Hamburg	Handelspfund, 32 Loth, 4 Qnt.	0·4842	0·8646
Hannover	s. Berlin; doch hält der Char 100 Pfund und die Schiffslast 4000 Pfund.		
Heidelberg	Das schwere Pfund . . .	0·5054	0·9025
	Das leichte Pfund, 32 Loth	0·4679	0·8357
Herrmannstadt, s. Wien.			

Name der Orte und Länder.	Name des Gewichtes.	Franz. Kilogramm	Bayer. Pfund.
Karlsruhe, s. Darmstadt.			
Kassel	Das schwere Pfund . . .	0·4842	0·8647
	Das leichte Pfund . . .	0·4678	0·8354
Konstantinopel	Rottel	0·6381	1·138
	Cantaar	0·7504	1·34
Kopenhagen	Pfund, 32 Loth, 4 Quent, 4 Ort, 16 Es, 8 Gran .	0·4993	0·8916
Krakau	Pfund	0·4058	0·7247
Lausanne	Pfund, 16 Unzen, 4 Quarts	0·5085	0·9081
Lemberg (Gallizien) . .	Handelspfund, 32 Loth . .	0·4200	0·7500
Leipzig	Pfund, 32 Loth, 4 Quentchen	0·4672	0·8343
Lissabon	Pfund	0·4589	0·8196
Livorno	D. alte Handelspfd. (Libbra)	0·4589	0·8196
London (Großbrittanien) .	Imp. Stand.-Troy. Pound .	0·3732	0·6665
	Handelspfd., 7000 Tr. Grains	0·4536	0·8099
Lübeck	Pfund	0·4847	0·8656
Lucca	Handelspfund, 12 Once, 24 Denari	0·3723	0·6648
	Seidenpfund	0·3337	0·5959
Luzern, s. Zürich.			
Madrid	Das Castilianische Pfund .	0·4601	0·8217
Mailand	Libbra peso grosso . .	0·7620	1·3608
	Libbra peso sottile . .	0·3268	0·5836
Mainz	Das alte leichte Pfund . .	0·4707	0·8405
Mannheim, s. Frankfurt.			
Meiningen	Handelspfund wie Coburg .		
Messina	Libbra, 12 Oncie, 30 Trapp.	0·3175	0·5671
Modena	Pfund, 12 Once, 16 Ferlini	0·3404	0·6080
München	Pfund, 32 Loth	0·5600	1
Neapel	Rottolo, 33⅓ Once . . .	0·8910	1·5911
	Libbra, 12 Once, 30 Trapp.	0·3208	0·5728
Neuenburg	Handelspfund, poids de fer, 2 Marcs	0·5201	0·9288
Nürnberg	Altes Handelspfd., 2 Mark, 32 Loth, 4 Quentchen, 4 Pfenn.	0·5099	0·9108
Oldenburg	Handelspfd., 32 Loth, 4 Quent	0·4842	0·8578
Osnabrück, s. Amsterdam.			
Paris	Das Kilogramm	1	1·7857
	Livre poids de marc, 16 Onces, 8 Gros, 3 Deniers	0·4895	0·8741
Parma und Guastalla . .	Libbra, 12 Once, 24 Denari, 24 Grani	0·3280	0·5857
Prag	Pfund, 32 Loth, 4 Quent	0·5143	0·9185
Preßburg (Ung.), s. Wien.			
Ragusa (Dalmatien) . .	Altes Handelspfund . . .	0·3633	0·6488
Rom	Handelspfd. (Lira), 12 Oncie, 24 Denari, 24 Grani .	0·3392	0·6056
Rostock (Mecklenb.-Schwer.)	Das Handelspfund wie Hamburg; gesetzl. Handelsgewicht wie Lübeck.		
	Stadtwage-Pfund . . .	0·5082	0·9076

Name der Orte und Länder.	Name des Gewichtes.	Franz. Kilogramm	Bayer. Pfund.
Schaffhausen	Das schwere Pfund . . .	0·5749	1·0267
	Das leichte Pfund . . .	0·4599	0·8214
Solothurn	Handelspfund, 32 Loth .	0·5184	0·9257
St. Gallen	Das schwere Pfund, 40 Loth	0·5775	1·0313
	Das leichte Pfund, 32 Loth	0·4650	0·8304
St. Petersburg (Rußland)	Pfund, 32 Loth, 31 Solotnik	0·4095	0·7313
Stockholm (Schweden) .	Viktualiengewichts-Pfund .	0·4253	0·7595
	Eisengewichts-Mark . . .	0·3405	0·6076
	Bergwerkgewichts-Mark .	0·3758	0·6711
	Landstädter Gewichtsmark .	0·3579	0·6392
Stuttgart (Würtemberg), s. Berlin.			
Tessin	Pfund, 12 Unzen . . .	0·3268	0·5836
Triest (Illyrien), s. Venedig und Wien.			
Turin (Sardinien) . . .	Pfund (Lira), 12 Once, 8 Ottavi, 3 Denari, 24 Grani, 24 Granotti . .	0·3688	0·6587
Valencia	Libbra gruesa, 18 Oncas, 4 Quartos	0·3560	0·6357
Venedig	Pfund, Peso grosso . .	0·4769	0·8518
	Pfund, Peso sottile . .	0·3012	0·5379
Warschau (Polen) . . .	Handelspfund (Funt), 32 Loth, 4 Drachmen . .	0·4055	0·7241
Weimar, s. Berlin.			
Wien (österreich. Staaten)	Handelspfund, 32 Loth, 4 Quent	0·5600	1·0000
Wiesbaden (Nass.), s. Mainz			
Zürich, sowie Schwyz, Uri und	Das schwere Pfund . . .	0·5286	0·9439
Zug	Das leichte Pfund, 2 Mark, 8 Unzen	0·4698	0·8390

5. Münzen.

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes in 24½ Guldenfuß. fl.	kr.	pf.
Anhaltische Herzogthümer			
rechnen nach Thaler (zu 24 Gutegroschen, zu 12 Pfennige)	1	45	—
Silbermünzen. Seit 1839: Vereinsmünze	3	30	—
Früher: Speciesthaler	2	27	—
Ausbeutethaler	1	45	—
Baden			
rechnet (wie Bayern) nach Gulden (zu 60 Kreuzer, zu 4 Pfennige)	1	—	—

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes in 24½ Guldenfuß.		
	fl.	kr.	pf.
Baden.			
Silbermünzen. 1Gulden-, 1/2 Guldenstücke, Vereinsmünze und Kronenthaler wie Bayern (s. unten).			
Früher (1828) auch Thalerstücke (zu 100 kr.)	1	39	3·3
1/2 u. 1/4 Thalerstücke (zu 50 u. 25 kr.) im Verhältniß.			
Goldmünzen. Dukaten (neueste und ältere)	5	36	—
Von 1819—1827: 10Guldenstücke	10	6	0·7
Vom Jahre 1828: Doppelte Ludwigsd'or oder 10 Thalerstücke] à 1000 kr.	16	50	1
5Gulden- und 5Thalerstücke à 500 kr. im Verhältniß.			
Bayern (S. 31.)			
rechnet seit 1837 nach Gulden (des 24 1/2 Guldenfußes)	1	—	—
rechnete vordem nach Gulden (des 24 Guldenfußes)	1	1	1
zu 60 Kreuzer, zu 4 Pfennig, zu 2 Heller.			
Silber. Seit 1837: 1Guldenstücke	1	—	—
1/2Guldenstücke	—	30	—
„ 1838: Vereinsmünze u. Geschichtsthaler	3	30	—
Vor 1837: Kronenthaler (à 2 fl. 42 kr. conv.)	2	41	3·32
Bayer-, Conventions- oder Speciesthaler und auch Geschichtsthlr.	2	27	—
24Kreuzerstücke	—	24	2
1/2 Speciesthaler u. 12Kreuzerstücke im Verhältniß.			
Gold. Dukaten	5	36	—
Früher: Karolinen à 11 fl.	12	13	1
Mard'or à 7 1/3 fl.	8	8	3
1/2Carolin u. doppelte Mard'or im Verhältniß.			
Papier. Noten der Hypotheken- und Wechselbank zu 10 und zu 100 fl.; im Cours wie Silbergeld.			
Belgien			
rechnet nach Francs (zu 100 Centimes)	—	28	1·15
Silber. 5 Fr.-, 2Fr.-, 1 Fr., 1/2, 1/4 Francsstücke; s. Frankreich.			
Gold. 40- und 20Francsstücke; s. Frankreich.			
Papier. Banknoten zu 50, 100, 500 u. 1000 Francs; im Werth wie Silbergeld.			
Brasilien			
rechnet (jetzt) nach Milreïs (zu 1000 Reïs)	2	5	0·16
Braunschweig			
rechnet seit 1834 nach Thalern (zu 24 gGr., zu 12 Pfenn.)	1	45	—
Silber. Seit 1834: Thalerstücke	1	45	—
1/6 Thalerstücke oder 4 gGr.	—	17	2
Guldenstücke	1	21	2·4
Gold. Seit 1834: Wilhelmsd'or	9	41	2·2
Dukaten	5	34	3·3
Bremen			
rechnet nach preuß. Friedrichsd'or (zu 5 Thaler Gold)	9	48	3·4
und nach Pistolen (zu 5 Thaler Gold)	9	41	0·4
Der Goldthaler zu 72 Grote à 5 Schwaren.			
(Diese Goldwährung ist gegen Silbergeld von veränderlichem Werth.)			

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes in 24½ Guldenfuß.		
	fl.	kr.	pf.
Bremen			
Silber. Seit 1840: 36 Grotestücke oder 1/2 Goldthaler	—	54	1·44
12 Grotestücke oder 1/6 Goldthaler	—	18	0·48
6- und 1 Grotestück im Verhältniß.			
China			
rechnet nach Tale, zu 10 Mace, zu 10 Candarin, zu 10 Cash ( )	3	35	1·8
Dänemark			
rechnet nach Reichsbankthaler (zu 6 Rbk. Mark, zu 16 Rbk. Schilling)	1	19	1·8
und auch nach Reichsthaler in wirklichen Species . .	2	38	3·7
der Reichsthaler zu 6 Mark à 16 Schilling dänisch, oder auch zu 4 Ort à 24 Schilling.			
Silber. Seit 1813: Ein Reichsthaler-Species . .	2	38	3·68
1/2 Species oder 1 Reichsbankthaler	1	19	1·84
1/3 Species oder 32 Reichsbankschillinge	—	26	1·95
1/12 und 1/24 Species im Verhältniß.			
Für Lauenburg, seit 1830: 2/3 Thalerstücke . .	1	21	2·6
Gold. Seit 1827: Einfache Frederiks- und neue Christiansd'or	9	40	3·4
Doppelte Frederiks- und doppelte neue Christiansd'or im Verhältniß	19	21	2·9
Früher: Speciesdukaten	5	33	2·5
Courantdukaten	4	26	1·4
Papier. Reichsbankthaler in Zetteln = 1/2 Species-thaler in Silber.			
England, Irland und Schottland (Großbrittanien).			
rechnen nach Pfund Sterling (zu 20 Schilling St., zu 12 Pence St.)	11	54	3
(Das Pfd. Sterling ist eine Goldwährung und daher gegen Silbergeld von veränderlichem Werth.)			
Silber. Vor 1817: Schilling Sterl. (zu 12 Pence St.)	—	35	—
Krone (Crown) (zu 5 Schill. St.)	2	55	—
Seit 1817: Schilling (zu 12 Pence) . . .	—	32	3·5
Krone (zu 5 Schilling) . . .	2	44	1·6
1/2 Krone, 1/2, 1/3, 1/4, 1/6, 1/12 Schill. im Verhältniß.			
Gold. Vor 1817: Guinea (zu 21 Schill. St.) .	12	30	2
5fache, doppelte, 1/2, 1/4 und 1/3 im Verhältniß.			
Seit 1817: Sovereign (Pfundstücke zu 20 Schill.)	11	54	3
5fache, doppelte u. halbe Sovereigns im Verhältniß.			
Papier. Banknoten von 5 bis 1000 Pfd. Sterl.			
Frankfurt am Main			
rechnet nach Gulden (wie Bayern)	1	—	—
Silber. Seit 1837 und 1838: 1, 1/2, 3 1/2 Gulden-stücke, wie Bayern.			
Vor 1837: Conventions-Speciesthaler . .	2	27	—
1/2, 1/4 Conv.-Speciesthlr. im Verhältniß.			
Gold. Dukaten	5	36	—
Frankreich			
rechnet nach Franc (zu 10 Decimen, zu 10 Centimen)	—	28	1·15
Silber. Seit 1795: 1 Francstück	—	28	1·15

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes in 24½ Guldenfuß.		
Frankreich.	fl.	kr.	pf.
Silber. Seit 1795: 5Francsstück	2	21	1·7
2Fr., 1/2 Fr., 1/4 Francsstücke im Verhältniß.			
Gold. Seit 1795: 20Francsstücke	9	26	3·3
Stücke zu 100 Francs und 10 Fr. (seit 1830) und " " 40 " im Verhältniß.			
Griechenland			
rechnet seit 1833 nach Drachmen zu 100 Lepta / von 1828—1833 nach Phönix zu 100 Lepta . .	—	25	1·30
Früher nach spanischen Piastern	2	31	3·8
Silber. Seit 1833: 1Drachma oder 100Leptastück .	—	25	1·30
5Drachmenstück	2	6	2·52
1/2 und 1/4 Drachmenstücke im Verhältniß.			
Gold. Seit 1833: 20Drachmenstück	8	27	2·1
Papier. Banknoten zu 25 und 50 Drachmen und darüber im Werth wie Silbergeld.			
Hamburg			
rechnet nach Marc Banco zu 16 Schilling, zu 12 Pfennig	—	52	3·9
Marc courant ditto ditto	—	43	0·9
Reichsthaler Banco zu 48 Schill. Lübisch .	2	38	3·7
Reichsthaler Courant ditto ditto .	2	9	2·8
Silber. Doppelte Markstücke zu 32 Schill. Lüb. Cour.	1	26	1·9
Markstücke zu 16 Schilling Lüb. Cour. . .	—	43	0·9
1/2, 1/4 und 1/8 Markstücke im Verhältniß.			
Gold. Dukaten	5	33	2·5
Hannover			
rechnet seit 1834 nach Thaler, (zu 24 gGr., zu 12 Pf.; wie Preußen)	1	45	—
Silber. Seit 1834: Thalerstücke	1	45	—
1/6 und 1/12 Thalerstücke im Verhältniß.			
Von 1816—1834: Gulden- oder feine 2/3 Thalerstücke	1	15	2
Gold. Seit 1834: Einfache Wilhelmsd'or	9	41	2·2
Doppelte Wilhelmsd'or im Verhältniß.			
Vor 1834: Dukaten	5	36	—
Georgsd'or	9	48	3·4
Doppelte und halbe Georgsd'or im Verhältniß.			
Hessen-Cassel (Churfürstenthum)			
rechnet seit 1840 nach Thaler (zu 30 Sgr., zu 12 Pf.; wie Preußen)	1	45	—
Silber. Seit 1838: Vereinsm., 1 Thlr. u. 1/6 Thlr. wie Preußen.			
Seit 1819: Einthalerstücke	1	45	—
Gold. Seit 1840: Wilhelmsd'or	9	48	3·4
Vor 1840: Wilhelmsd'or	9	44	3·7
Hessen-Darmstadt (Großherzogthum)			
rechnet seit 1837 nach Gulden (zu 60 kr., zu 4 Pf.; wie Bayern)	1	—	—
Silber. Vereinsmünze, 1Gulden, 1/2 Guldenstücke, Kronenthaler, Conv.-Speciesthaler wie Bayern.			
Gold. 10Guldenstücke	9	52	3·9

Namen der Länder, Orte und Münzen	Werth eines Stückes in 24½ Guldenfuß		
Hohenzollern-Hechingen und Sigmaringen	fl.	kr.	pf.
rechnet nach Gulden (zu 60 kr., zu 4 Pf.; wie Bayern)	1	—	—
Silber. Seit 1838: wie Bayern.			
Früher: Conv.-Speciesthaler, s. Bayern.			
Gold. Dukaten und Karolinen wie Bayern.			
Holland			
rechnet seit 1839 nach Gulden zu 100 Cents	—	59	1·6
rechnete von 1816—1839 nach Gulden zu 100 Cents	1	—	1·7
Silber. Seit 1839: a) Reichsmünzen:			
2 1/2 Guldenstücke (Thaler)	2	28	2·0
1 Guldenstücke zu 100 Cents	—	59	1·6
1/2, 1/4, 1/10, 1/20 Gulden im Verhältniß.			
b) Handelsmünzen (schon seit 1816)			
Silberdukaten oder Thaler	2	35	0·8
Silberruyder oder Dukatons	3	11	3·1
Von 1816—1839 Reichsmünzen			
3 Guldenstücke	3	1	1·1
1 Guldenstücke zu 100 Cents	1	—	1·7
1/2, 1/4, 1/10, 1/20 Guldenstück im Verhältniß.			
Aeltere Münzen: Schilling (zu 6 Stüber)	—	17	3·6
Stüber (zu 8 Deut)	—	2	3·3
Gold. Seit 1816: 10 Guldenstücke	9	51	0·8
„ 1825: 5 Guldenstücke	4	55	2·4
„ 1816: Dukaten	5	35	0·6
Aeltere Goldmünzen: Oesterr.-Niederl. Souverainsd'or	16	35	1
Holländische Ruyder	14	50	2
Holländer Dukaten	5	34	3
Papier. Banknoten von 25 bis 1000 fl. im Werth wie Silbergeld.			
Kanada			
rechnet nach Pfund = 9/10 des engl. Pfd. Sterl. (zu 20 Schilling, zu 12 pf. Cour.)	10	45	1·1
Kirchenstaat			
rechnet nach dem Scudo romano (Piaster) (zu 10 Paoli oder 100 Bajocchi, zu 5 Quatrini)	2	32	0·7
(In Ankona auch eingetheilt in 20 Soldi, zu 12 Danari.)			
Bologna rechnet nach Lira (zu 20 Soldi, zu 12 Denari):			
in Courant (Fouri Banco)	—	30	1·8
in Wechselgeld:	—	51	0·87
Silber. Seit 1835: 1 Scudostück	2	32	0·7
1 Paoli (= 1/10 Scudi)	—	15	0·9
1/2 Scudi, 3/10 Scudi (Testoni), 2/10 Scudi (Papetti), 1/20 Scudi (1/2 Paoli) im Verhältniß.			
Aeltere Münzen: 1 Scudo romano zu 100 Bajocchi	2	32	1·1
1 Scudo zu 10 Paoli (v. Bologna)	2	30	1·9
1 Madonnathaler (v. Bologna)	2	32	—
Halbe Scudo und Madonnathaler im Verhältniß.			
Gold. Seit 1835: 10 Scudi- oder 100 Paolistücke	25	25	0·5
5 Scudi- und 2 1/2 Scudistücke im Verhältniß.			
Seit 1818: Doppien	8	9	1·6

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes in 24½ Guldenfuß.		
	fl.	kr.	pf.
Kirchenstaat.			
Gold. Seit 1818: Zechinen	5	54	1·4
Halbe Doppien und 1/2 Zechinen im Verhältniß.			
Papier. Banknoten zu 25, 50 und 100 Scudi im Werth wie Silbergewicht.			
Krakau			
rechnet nach Gulden (zu 30 Groschen)	—	17	0·5
Silber. Seit 1835: 1Guldenstücke	—	17	0·5
Lippe-Detmold und Lippe-Schaumburg			
rechnen seit 1842 nach Thaler, (zu 30 Sgr., zu 12 Pf.)	1	45	—
rechneten vorher nach Thaler (zu 36 Mariengr., zu 6 Pf., zu 2 Heller)	1	50	1
Silber. Seit 1842: Wie Preußen.			
Vorher: Speciesthaler	2	27	—
(Lippe-Schaumburg.)			
Gold. Georg Wilhelmsd'or	9	38	0·7
Doppelter Georg Wilhelmsd'or im Verhältniß .	19	16	1·5
Lombardisch-Venetianisches Königreich			
rechnet seit Nov. 1823 nach dem Lira austriaca (zu 100 Centesimi = 1/3 Reichsgulden)	—	24	2
Silber. Seit 1823: Scudi zu 6 Lir. aust. (= 1 Conv.-Spec.-Thlr.	2	27	—
1/2 Scudi (zu 3 Lir. aust., = 1 Reichsgulden) .	1	13	2
1 Lira austriaca (= 20 kr. Conv.-Geld	—	24	
1/2, 1/4 Lirestück im Verhältniß.			
Vorher für das Königreich Italien: Stücke zu 5, 2, 1, 3/4, 1/2 und 1/4 Lir. ital. im Werth der französ. 5-, 2-, rc. Francsstücke (s. Frankreich).			
Gold. Seit 1823: Souverainsd'or (zu 40 Lir. austr.)	16	35	2·2
Halbe Souverainsd'or (zu 20 Lir. austr.)	8	17	3·1
Lübeck			
rechnet nach Mark Courant (zu 16 Schilling, zu 12 Pf.)	—	43	0·9
und nach Thaler Lüb. (zu 48 Schill., zu 12 Pf.) . .	2	9	2·8
Silber. Speciesthaler	2	43	1·3
Courantthaler (zu 3 Mark Courant) . . .	2	9	2.8
1Markstück (zu 16 Schilling)	—	43	0·9
1Schillingstück	—	2	2·2
2Mark-, 8-, 4-, 2Schill.-Stücke im Verhältniß.			
Gold. Einfache Dukaten	5	33	2·3
Doppelte Dukaten	11	7	1
Luxemburg			
rechnet wie Holland.			
Mecklenburg-Schwerin			
rechnet nach Thaler (zu 48 Schilling)	2	2	2
Silber. Seit 1789: ⅔ Thalerstücke oder Gulden . .	1	21	2⅔
Gold. Einfache Friedrich-, Franz- und Paulsd'or .	9	42	1·5
Doppelte ditto .	19	24	3
Mecklenburg-Strelitz			
rechnet nach Reichsthaler (zu 24 gGr. oder zu 48 Schill.)	1	50	1
Silber. 1/6 Thaler- oder 4gGroschenstücke	—	18	1½

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes in 24½ Guldenfuß. fl.	kr.	pf.
Mecklenburg-Strelitz.			
Silber. 1/12 Thaler oder 2gGroschenstücke . . .	—	9	¾
Gold. Pistolen	9	48	3·4
Mexiko			
rechnet nach Peso de Plata (zu 8 Real. de Plata, zu 4 Quartillos, auch Piaster u. Dollar, zu 100 Cents, genannt)	2	31	3·8
Silber. Pesos, Piaster auch Dollars (zu 8 Real d. P. mex.)	2	35	2·3
Gold. Onza de Ore, Doblone (zu 8 Escud. de oro oder 16 Pesos)	38	31	3
1/2, 1/4, 1/8 Onza (= Escudo) 1/16 Onza im Verhältn.			
Modena			
rechnet nach dem Lira italiana (zu 100 Centesimi) .	—	28	1·15
Silber. Scudi nuovi (zu 5 Lire ital.)	2	21	1·7
1 Lira ital.	—	28	1·15
Stücke von 2, 1/2, 1/4 Lir. ital. im Verhältniß.			
Gold. Stücke von 40 Lir. ital.	18	55	2·6
20 „	9	26	3·3
Nassau			
rechnet wie Bayern nach Gulden, zu 60 kr., zu 4 Pf.			
Münzen. 1Gulden-, 1/2Guldenstücke, Kronenthl., Conv.-Speciesthaler, Dukaten, wie Bayern.			
Nordamerikanische vereinigte Staaten.			
rechnen nach Dollar (Piaster) zu 10 Dimes od. zu 100 Cents.)	2	31	0·8
Silber. Dollar (zu 100 Cents)	2	31	0·8
1/2, 1/4 Dollars im Verhältniß.			
Gold. Seit 1837: Eagles (Adler) zu 10 Dollars .	24	28	2·8
1/2, 1/4 Eagles im Verhältniß.			
Norwegen.			
rechnet nach Speciesthaler (zu 5 Ort oder Mark, zu 24 Schilling)	2	38	3·7
Silber. Speciesthaler	2	38	3·7
1/2, 1/5 u. 1/15 Speciesthaler im Verhältniß.			
Papier. Noten der Reichsbank zu 100, 50, 10, 5, 1 u. 1/2 Speciesthaler im Werth wie Silbergeld.			
Oesterreich			
rechnet nach Reichsgulden (zu 60 kr.)	1	13	2
„ „ Reichsthaler (zu 90 kr.)	1	50	1
und nach Gulden Wiener Währung (Einlösungsscheine)	—	29	1·6
Silber. (Convent. v. 1753) Speciesthaler zu 2 Gulden	2	27	—
Guldenstücke oder halbe Speciesthaler . .	1	13	2
20Kreuzerstücke	—	24	2
Gold. Reichsdukaten	5	36	—
Ungarische Dukaten	5	37	0·7
Doppelte u. vierfache Reichsdukaten im Verhältniß.			
Papier. Banknoten zu 5, 10, 25, 50, 100, 500 und 1000 Reichsgulden (gewöhnlich Münze genannt) von einerlei Werth wie Silbergeld.			
Scheine (Wiener Währ. oder Einlös.-), zu 1, 2, 5, 10, 20 u. 100 fl., von denen 2 1/2 den Werth von 1 Reichsgulden Münze haben.			

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes im 24½ Guldenfuß.		
	fl.	kr.	pf.
Oesterreich.			
Seit 15. Juni 1842: Kassenanweisungen der österreich. Nationalbank zu 50, 100, 500 und 1000 Reichsgulden, mit tägl. Zinsenvergüt. zu jährl. 3 pCt.			
Ostindien (engl. Besitzungen)			
rechnen nach der gesetzlich allgemeinen Company-Rupie	1	7	0·8
Oldenburg			
rechnet nach Thaler (zu 72 Groten, zu 5 Schwaren) .	1	59	—
(Goldwährung daher gegen Silber veränderlich.)			
Silber. Seit 1816: 24 Grote oder 1/3 Thaler . .	—	50	2·5
12-, 6- und 4Grotestücke im Verhältniß.			
(für Birkenfeld)			
Silber. Seit 1840: 2Thaler- oder 3 1/2 Guldenstücke	3	30	—
Polen			
rechnet seit 1842 wie Rußland nach Rubel (zu 6 2/3 fl. polnisch)	1	53	0·5
rechnete von 1833—42 nach Gulden (zu 30 Gr. oder 15 Kopeken)	—	16	3·9
Silber. Von 1833—42: 10Guldenstücke (=1 1/2 Rubel)	2	49	2·7
5- und 1Guldenstücke im Verhältniß.			
Gold. Seit 1834: Dukaten oder Rubel-Imper zu 20 fl. oder 3 Rbl.	5	51	1·5
Von 1842 an hat Polen durchgängig die Münzen wie Rußland.			
Papier. Seit 1830: Bankbillets zu 5, 50 und 100 fl. polnisch, im Werth wie Silbergeld.			
Portugal			
rechnet nach Milreïs zu 1000 Reïs; deren Werth ist seit 1835	2	50	2·4
Silber. Seit 1835: Kronen (Coronas) zu 1000 Reïs	2	50	2·4
1/2 Kr., 1/5 Kr. zu 200 Reïs, 1/10 zu 100 R. im Verhältniß.			
Gold. Seit 1835: Goldkrone (Cor. d'ouro) zu 5000 Reïs	14	15	2·3
1/2 Goldkr. (Meios-Cor. d'ouro) zu 2500 Reïs .	7	7	3·1
Preußen			
rechnet nach Thaler (früher eingetheilt in 24 gGr., zu 12 Pf., seit 1821 aber in 30 Sgr. zu 12 Pf.) .	1	45	—
Silber. Ein Thaler (zu 30 Sgr., zu 12 Pf.) . .	1	45	—
1/6 Thaler (zu 5 Sgr.)	—	17	2
Seit 1839: 2Thalerstücke oder Vereinsmünzen	3	30	—
Gold. Seit 1770: Einfache Friedrichsd'or (zu 5 Thlr. Gold)*	9	48	3·4

* Seit 1842 werden in Preußen bei allen öffentlichen Kassen 100 Thlr. Gold, in preuß. Friedrichsd'or, für 113 1/3 Thlr. Silber gerechnet, d. i. der Friedrichsd'or von 5 Thlr. Gold zu 5 2/3 Thlr. Silber, und stets so angenommen und ausgegeben. Bei diesem in den preuß. Staatsrechnungen geltenden festen Course ist der Werth des gemünzten Goldes 15 9/13 Mal (= 15·6923) größer, als der des gemünzten Silbers. Fremdes Gold wird von den kgl. preuß. Kassen nicht angenommen.

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes in 24½ Guldenfuß.		
	fl.	kr.	pf.
Preußen.			
Doppelte zu 10 Thlr. Gold und halbe Friedrichsd'or zu 2 1/2 Thaler im Verhältniß.			
Papier. Kassenanweisungen zu 1, 5, 50, 100 und 500 Thaler Courant, im vollen Werth wie Silbergeld.			
Reußische Fürstenthümer			
rechnen seit 1841 nach Thaler (zu 30 Sgr., zu 12 Pf.; wie Preußen)	1	45	—
Silber. Seit 1841: Vereinsmünze zu 2 Thaler . .	3	30	—
Rußland			
rechnet nach Rubel (zu 100 Kopeken)	1	53	0·5
Silber. Seit 1810: Silberrubel (oder Banco) zu 100 Kopeken)	1	53	0·5
1/2 Silberrubel (zu 50 Kopeken)	—	56	2·3
Stücke zu 25, 20 u. 10 Kopeken im Verhältniß.			
Gold. Seit 1763: Imperialen (zu 10 Rubel) . .	19	31	0·9
Halbe Imperialen (zu 5 Rubel) .	9	45	2·4
Platina. Seit 1828: 3Rubelstücke*	5	59	1·5
Stücke von 6 und 12 Rubel im Verhältniß.			
Papier. Bank-Assignaten zu 5 Rubel auf blauem Papier, zu 10 Rubel auf rothem, zu 25, 50, 100 und 200 Rubel auf weißem Papier. Seit 1840 ist der feste Cours 3 1/2 Rubel Papier = 1 Silberrubel.			
Russisch-polnische Münzen nach dem Ukas vom 1. Mai 1834.			
Silber. 1 1/2 Rubel (= 10 fl. polnisch)	2	49	2·7
3/4 Rubel (= 5 fl. poln.), 15 Kopeken (= 1 fl. polnisch) im Verhältniß.			
Gold. Rubel-Imperial (zu 3 Rubel oder 20 fl. poln.)	5	51	1·5
Sachsen (Königreich)			
rechnet seit 1841 nach Thaler (zu 30 Neugroschen, zu 10 Pf.)	1	45	—
dabei noch nach Thaler in Conventionsmünze . .	1	47	3·66
rechnete früher nach Reichsthaler (zu 24 gGr., zu 12 Pf.)	1	50	1
Silber. Seit 1838: Vereinsmünze, 1 Thaler- und 1/3 Thalerstücke wie Preußen.			
Gold. Augustsd'or (zu 5 Thaler)	9	48	3·4
Doppelte Augustsd'or (zu 10 Thl.) im Verhältn.			
Dukaten wie Bayern.			
Papier. 1) Scheine zu 1 u. 2 Thaler des 14Thalerfußes.			
1) Noten der Leipziger Bank zu 20 Thlr. des 14Thalerfußes, dann zu 100, 200, 500 u. 1000 Thaler in Conventionsmünze.			
Sachsen-Altenburg			
rechnet seit 1841 und rechnete früher wie Königreich Sachsen.			
Silber. Seit 1838: Wie im Königreich Sachsen.			
Sachsen-Coburg-Gotha			
Rechnungs- und Silberg.: In Coburg wie in Bayern. In Gotha wie im Königr. Sachs.			
Gold. Dukaten	5	33	2·5

* Das Platina ist hiebei 5·2146 Mal höher als Silber ausgemünzt.

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes in 24½ Guldenfuß.		
Sachsen-Meiningen und Hilburghausen	fl.	kr.	pf.
Seit 1837: Rechnungs- und Silbergeld wie Bayern.			
Seit 1830: Silbermünz: Gulden	1	—	2
Sachsen-Weimar und Eisenach.			
Seit 1840: Rechnungs- und Silbergeld wie Preußen.			
Dabei noch und früher wie Königreich Sachsen (s. oben).			
Vordem seit 1763: Silberm.: Speciesthaler . . .	2	27	—
Gulden (zu 16 gGr.) .	1	13	2
1/3 Thalerstücke . . .	—	36	3
1/6 und 1/12 Thalerstücke im Verhältniß.			
Sardinien			
rechnet seit 1827 nach der Lira nuove zu 100 Cent.			
(=1 franz. Franc)	—	28	1·15
Silber. Seit 1815: 5Lire- (1 Scudi), 2-, 1-, 1/2, 1/4 Lirestücke, s. Frankreich.			
Gold. Doppien zu 20-, 40-, 80Lirestücken, s. Frankreich.			
Schwarzburg-Rudolstadt.			
In der Oberherrschaft, seit 1841: Rechn.- u. Silbergeld wie in Bayern.			
In d. Unterherrschaft, seit 1841: Rechn.- u. Silbergeld wie in Preußen.			
dabei noch nach Thaler in Conventionsmünze . .	1	47	3·66
Schwarzburg-Sondershausen			
rechnet seit 1841 nach Thaler (zu 30 Sgr. zu 12 Pf.)	1	45	—
dabei noch nach Thaler in Conventionsmünze . .	1	47	3·66
Silber. Seit 1841: Vereinsmünze, 1Thaler- und 1/6 Thalerstücke, wie Preußen.			
Vordem, seit 1763: 1/6 Thalerstücke	—	18	1·3
1/12 „	—	9	3/4
Schweden			
rechnet a) nach Reichsthaler-Species (zu 48 Schilling Spec., zu 12 Pf. oder Oere oder Rundstücke)	2	40	1·8
b) nach Thaler-Bancogeld (1 Thaler Banco = 2/3 Thaler Spec. seit 1830) zu 48 Schill. Bancogeld, zu 12 Pf. Bancogeld	1	—	0·67
c) nach Thaler-Reichsschuldzettel (1Thlr. = 2/3 Thlr. Banco = 1/4 Thlr. Spec. seit 1830) zu 48 Schill. Reichsgeld, zu 12 Pf. Reichsg.	—	40	0·45
Silber. Seit 1830: Speciesthaler (zu 48 Schill.) .	2	40	1·8
1/2, 1/4, 1/8 u. 1/12 Speciesthlr. im Verhältniß.			
Gold. Seit 1777: Dukaten	5	31	3·3
Zweifache und vierfache Dukaten im Verhältniß.			
Papier. a) Bankzettel der Reichsbank zu 8, 10, 12, 14 und 16 Schill. Banco, und zu 2, 3, 5, 6, 9 u. s. f. bis 50 Thaler Banco.			
b) Reichsschuldzettel, 1 Thaler = 2/3 Thaler Banco = 12 Schill. Spec.			
Schweiz. Aargau			
rechnet nach Schweizerfranken (zu 10Batzen, zu 10 Rappen)	—	41	3·6
„ nach Gulden (zu 15 Batzen, zu 4 kr) . . .	1	2	3·4

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes in 24½ Guldenfuß. fl.	kr.	pf.
Appenzell			
rechnet nach Gulden (zu 60 kr., zu 4 Angster; auch zu 15 Batzen oder 50 Schilling)	1	1	1
Basel			
rechnet nach Gulden (zu 60 kr., zu 8 hl., od. zu 15 Bz., zu 4 kr.)	1	2	3·4
„ Schw. Franken (zu 10 Bz., zu 10 Rp.) } „ Livres, (à 20 Sols, à 12 Deniers) }	—	41	3·6
Bern			
rechnet nach Livres und Schw. Franken (wie Basel) .	—	41	3·6
Freiburg			
rechnet nach Schw. Fr. (Livres) und Gulden, wie Aargau.			
Genf			
rechnet nach Livres (à 20 Sols, à 12 Deniers) . .	—	45	2·3
„ Gulden (à 20 Sols, à 12 Den. petite monn.)	—	15	0·1
Glarus			
rechnet nach Gulden (zu 15 Bz. zu 4 Pf., oder zu 40 Schill. zu 12 Hlr.)	1	3	—
Graubünden			
rechnet nach Gulden (zu 60 kr. oder 70 Bluzger) . .	—	48	2·8
Luzern			
rechnet nach Schw. Franken (zu 10 Bz., zu 10 Rp.) .	—	41	3·6
Neuenburg oder Neufchatel			
rechnet nach Livres (à 20 Sols, à 12 Den. tourn. de Neufch.)	—	41	2·2
„ Schw. Franken (zu 10 Bz., zu 10 Rp.) .	—	41	3·6
St. Gallen			
rechnet nach Gulden (zu 60 kr., zu 4 Hl.)	1	1	1
Schaffhausen			
rechnet nach Gulden (zu 15 Bz., oder zu 60 kr., zu 4 Hlr.)	1	1	1
Schwyz			
rechnet nach Gulden (zu 15 Bz., oder zu 60 kr., zu 4 Hl., auch zu 40 Schill., zu 4 Rp.)	1	7	0·2
Solothurn			
rechnet nach Schw. Franken (zu 10 Bz., zu 10 Rp.) .	—	41	3·6
Tessin			
rechnet nach Lira (à 20 Soldi, à Quattrini oder 12 Denari)	—	18	1·5
Thurgau			
rechnet nach Gulden (zu 60 kr., zu 4 Angster) . . .	1	1	1
„ Schw. Franken (zu 10 Bz., zu 10 Rp.) .	—	41	3·6
Unterwalden			
rechnet nach Gulden (zu 15 Bz. zu 4 kr., oder zu 40 Schilling, zu 6 Angster)	—	55	3·5
Uri			
rechnet nach Gulden (zu 15 Bz. zu 4 kr., oder zu 40 Schill. zu 6 Angster, zu 2 Hlr.)	—	51	2·5
Waadt und Wallis			
rechnet nach Schw. Franken (zu 10 Bz., zu 10 Rp.) .	—	41	3·6
Zug			
rechnet nach Gulden (zu 15 Batzen, zu 4 kr., oder wie Uri)	—	52	3·9

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes im 24½ Guldenfuß.		
	fl.	kr.	pf.
Zürich			
rechnet nach Gulden (zu 60 kr. zu 8 Hlr., oder zu 40 Schill. zu 12 Hlr.)	1	7	0·2
„ Schw. Franken (zu 10 Bz., zu 10 Rp.) .	—	41	3·6
Sicilien			
rechnet seit 1818 nach dem Ducato di Regno . . .	2	—	0·7
zu 10 Carlini oder 100 Grani, welch letztere auf Sicilien Bajocchi heißen.			
Silber. Seit 1818: 1 Scudo oder Piaster (zu 12 Carlini	2	24	0·9
der Ducato (zu 10 Carlini oder 100 Grani) .	2	—	0·7
Stücke zu 1, 2 u. 6 Carlini (1/2 Scudi) im Verhältn.			
Gold. Seit 1818: Oncetta (zu 3 Ducat.) . . .	6	8	0·8
Quintupla (zu 15 Duc.) und Decupla (zu 30 Duc.) im Verhältniß.			
Spanien			
rechnet nach Piaster, Peso duro (zu 8 Reales de Plata mex. oder 20 Real. de Vellon)	2	31	3·8
(In den Provinzen bestehen überdieß viele verschiedene Währungen)			
Silber. Seit 1772: Piaster, Peso duro (zu 8 Real. de Plata mex. oder 20 R. de Vellon à 34 Mara ved)	2	33	2·3
— — 1/2, 1/4, 1/3, 1/6 Piaster im Verhältniß.			
1 Real de Vell. od. 1/4 Pesetas provinciales .	—	7	2·1
— — Stücke zu 4 Real. de Vellon (Pesetas) und 2 Real. de Vellon im Verhältniß.			
Gold. Seit 1786: Onzas de oro od. Quadrupels .	38	31	3
1/2 Onz. (Doblon de a ocho) 1/4 Onz. (Doblons oder Pistolen) 1/8 Onza (Escudo de oro) im Verhältniß.			
Escupillo do oro coronillas oder Goldpiaster . .	2	24	3·2
Südamerikanische Freistaaten			
(Araucanen, Bolivia, Chile, Ecuador, Mittelamerika, Neu-Granada, Paraguay, Peru, Rio de la Plata, Uruguay, Venezuela.)			
rechnen nach Peso de Plata mex. (Piaster zu 8 Real.), der auch Dollar heißt (zu 100 Cent.) .	2	31	3·8
„ dem Real (zu 16 Quartos od. 34 Maraved.)	—	19	—
Silber. Piaster oder Pesos (zu 8 Real. mex.) . .	2	33	2·3
1/2, 1/4 und 1/8 im Verhältniß.			
Gold. Onza de oro (zu 8 Escudos de oro) . .	38	1	2
1/4 und 1/8 Onzas im Verhältniß.			
Toskana			
rechnet nach Fiorino (= 2 1/2 Paoli) zu 100 Quattrini	—	39	2·3
„ Lira (in moneta buona oder corrente) .	—	25	3·1
„ Lira (in moneta lunga)	—	22	3.15
Der Lira zu 20 Soldi, zu 12 Denari.			
„ Scudi (zu 7 Lira) und nach Paoli (zu 1/5 Fiorini) im Verhältniß.			

Namen der Länder, Orte und Münzen.	Werth eines Stückes im 24½ Guldenfuß. fl.	kr.	pf.
Toskana			
rechnet nach Pezza da otto reali (à 20 Soldi, à 12 Den. di Pezza)	2	16	2'86
Silber. Fiorino (zu 100 Quattrini)	—	39	2'5
Stücke zu 4 Fior. (10 Paoli), 2 Fior. (5 Paoli), 1/2 und 1/4 Fior. im Verhältn.			
1 Paolastück	—	15	3'1
1 Lirastück (= 1 1/2 Paoli)	—	23	2'0
Dene (10 Lirastücke)	3	57	2'3
Stücke zu 2, 1/2 Paoli, zu 1/2 Dene (5 Lira) im Verhältniß.			
Gold. 80 Fiorini	53	4	0'8
Rusponi (zu 40 Lire oder 60 Paoli oder 24 Fiorini)	17	1	1'8
Zecchini (zu 13 1/3 Lire oder 20 Paoli oder 8 Fiorini	5	40	1'9
Türkei			
rechnet nach Piaster, deren Werth im Jahr 1841 . .	—	6	1'6
zu 40 Paras, oder 120 Conv. Asper, oder 100 gute Asper.			
Waldeck			
hat die Rechnungs- und Silbermünzen wie Preußen.			
Württemberg			
rechnet nach Gulden (zu 60 kr., zu 4 Pf.)	1	—	—
Silber. Seit 1837: Wie Bayern.			
Seit 1824: 1 Guldenstücke	1	—	—
2 Guldenstücke	2	—	—
Conv.-Speciesthaler u. Kronenthaler wie Bayern.			
Gold. Dukaten und früher ganze u. halbe Carolinen wie Bayern.			

* Diese Angaben des §. 119 enthält der „Kalender auf das Jahr 1844. Auf Veranlassung und mit besonderer Unterstützung Sr. Königl. Hoheit des Kronprinzen von Bayern herausgegeben von Hofrath Dr. F. B. W. Hermann." Außer diesen sei hier noch (aus Weigel) ein

Meilenmaaß.

Meilen	gehen auf einen Meridiangrad.	Meilen	gehen auf einen Meridiangrad.
Arabische	56'5044	Französ. Lieue . . .	25'0...
Bayerische (Chaussée) .	14'9847	„ neue Seemeilen	20'0...
Böhmische	16'0813	Holländische	18'9447
Deutsche (geogr. §. 27) .	15'0. . .	Italienische	59'82881
Englische, neue . . .	68'9167	Neapel (voi)	57'71
„ Seemeile . .	59'8288	Oesterr. Postmeilen . .	14'9456
„ Leagues . .	19'9441	Portugiesische	17'9483

Meilen	gehen auf einen Meridiangrad.	Meilen	gehen auf einen Meridiangrad.
Römische, neue . . .	74·7	Schweizerische	13·260
Russische (Wersten) . .	104·026	Spanische	26·5546
Sächsische (Polizeimeile) .	12·255	Türkische, gew. oder Berri	66·4827
Schwäbische	11·9652	Seemeile	84·6822
Schwedische	10·380	Ungarische	13·2912

II. Abtheilung.

Aufgaben und Beispiele aus dem Leben.

I. Artikel.

Angewandte arithmetische Proportionen.

§. 120.

Aufgabe.

Gegebene Jahre einer Zeitrechnung in Jahre einer andern Zeitrechnung zu reduziren.

I. Aufgabe.

Gegebene Jahre der Welt in Jahre christlicher Zeitrechnung zu reduziren und v. v.

Auflösung.

1) Man nenne das Jahr der Geburt Christi (nach Kepler) das 3983. der Weltschöpfung und das 0. der christlichen Zeitrechnung. — Die Jahre nach Christi Geburt sind positiv, die vor Christi Geburt negativ in christlicher Zeitrechnung.*

* Das 3983. Jahr der Weltschöpfung und das 0. der christlichen Zeitrechnung können mit Vorzug die Jahre der Welt und Geburt Christi, und die in Rechnung gebrachten, das zu bestimmende und das bestimmende, beliebige Jahre genannt werden.

2) Man bilde eine arithmetische Proportion, indem man sagt: „Es verhält sich das Jahr der Welt (W = 3983) zum beliebigen der Welt (W′ = m), wie das Jahr Christi (Ch = o) zum beliebigen Christi (Ch′ = n); d. i.

$$W - W' = Ch - Ch'; \text{ oder}$$
$$3983 - m = o - n; \text{ oder}$$
$$m - 3983 = n - o.$$

3. Es kann m oder n die unbekannte Größe bezeichnen. Diese Größe suche man nach §. 108.

Beispiele.

I. Der Anfang des siebenzigjährigen babylonischen Exils fällt in das Jahr der Welt 3384; welches Jahr in christlicher Zeitrechnung ist dieses?

Auflösung.

$$3983 - 3384 = 0 - x;$$

$$x + 3983 = 3384 + 0;$$

$$x = 3384 - 3983 = -599;$$

d. h. das 599. a. Ch. n.

II. Das wie vielte Jahr der Welt ist 1844 p. Ch. n.?

Auflösung.

$$3983 - x = 0 - 1844;$$

$$x + 0 = 3983 + 1844;$$

$$x = 5827;$$

d. h. das 5827. der Welt.

II. Aufgabe.

Angaben der Olympiadischen Zeitrechnung in Angaben der christlichen Zeitrechnung zu verwandeln und v. v.

Auflösung.

1) Um ein gegebenes Jahr einer bestimmten Olympias in das entsprechende der christlichen Zeitrechnung zu reduziren,

vermindere man die Zahl des gegebenen Olympias um 1, und

multiplizire den Rest mit 4, zu dem Produkte addire man die Zahl des gegebenen Jahres. Die hiedurch erhaltene Summe ist das gesuchte Jahr in der Olympischen Aere. Man bilde nun eine arithmetische Proportion, indem man sagt: „Es verhält sich das Jahr der Olympiaden (O = 776) zum beliebigen der Olympiaden (O′ = m), wie das Jahr Christi (Ch = o) zum beliebigen christlicher Zeitrechnung“ — und löse diese Proportion nach §. 108 auf.

2. Hat man ein gegebenes Jahr der christlichen Zeitrechnung in Olympiadische Zeitrechnung zu reduziren, so sehe man, ob es ist

a) ein Jahr nach Christi Geburt (p. Ch. n.) oder
b) " " vor " " (a. Ch. n.); und ob die Zahl für ein Jahr letzterer Art
kleiner oder
größer sei als 777.

a.

Man addire zum gegebenen Jahre der christlichen Zeitrechnung 776 und theile die erhaltene Summe durch 4. Der Quotient, den man dadurch erhält, gibt die Zahl der verflossenen Olympiaden, und der Rest das Jahr der nächsten oder laufenden Olympias.

b.

Wenn eine Zahl a. Ch. n. gegeben ist, so theile man die Differenz zwischen 777 und der gegebenen Zahl durch 4. Die Ganzen des Quotienten bezeichnen die Olympiaden, der Rest das Jahr der laufenden Olympias. — Wenn die angegebene Zahl kleiner ist als 777, so wird der Quotient positiv und die Jahre sind Jahre nach Olympiaden; ist die Zahl größer als 777, so wird Quotient negativ ...

* Jahre vor Olympiaden finden sich bei Schriftstellern nicht.

Beispiele.

I. Aristides, von dem eine Tragödie des Aeschylos sagt: „Er wollte nicht gerecht scheinen, sondern sein!" soll im zweiten Jahrr der 77. Olympiade gestorben sein; in welchem Jahre Christi war dieses?

Auflösung.

$$(77 - 1) \times 4 + 2 = 76 \,.\, 4 + 2 = 306;$$
$$777 - 306 = 0 - x;$$
$$x + 777 = 306;$$
$$x = 306 - 777 = - 471;$$

d. h. das 471. Jahr a. Ch. n.

II. Otto Friedrich Ludwig, königl. Prinz von Bayern, wurde am 27. Mai 1832 König von Griechenland; in welchem Jahre der Olympiaden war dieses?

Auflösung.

$(1832 + 777) : 4 = 2609 : 4 = 652 + \frac{1}{4}$;

d. h. im ersten Jahre der 653. Olympiade.

III. Durch Thrasybul wurde 403 a. Ch. n. die Athenische Demokratie hergestellt; in welchem Jahre der Olympiaden war dieses?

Auflösung.

$(777 - 403) : 4 = 374 : 4 = 93 + \frac{2}{4}$;

d. i. im zweiten Jahre der 94. Olympias.

III. Aufgabe.

Jahre Roms in Jahre christlicher Zeitrechnung zu verwandeln und v. v.

Auflösung.

1) Man nenne das Jahr der Geburt Christi das 753. der Stadt, und das 0. der christlichen Zeitrechnung; dann bilde man eine arithmetische Proportion, indem man sagt: „Es verhält sich das Jahr der Stadt (R = 753) zum beliebigen der Stadt (R′ = m), wie das Jahr Christi (Ch = o) zum beliebigen Christi (Ch′ = n); d. i.

$$R - R' = Ch - Ch'; \text{ oder}$$

$$753 - m = o - n.$$

2. Es kann m oder n die unbekannte Größe bezeichnen; diese Größe suche man nach §. 108.

* Die Jahre Christi nach Christi Geburt sind (wie I. Aufgabe) positiv, die vor Christi negativ in christlicher Zeitrechnung.

Beispiele.

I. Trajan, der beste römische Kaiser, starb 870 u. c.; in welchem Jahre Christi?

Auflösung.

$$783 - 870 = 0 - x;$$

$$x = 870 - 753 = 117;$$

d. i. 117 christlicher Zeitrechnung.

II. Die ersten Geldmünzen wurden zu Rom im Jahre der Stadt 547 geprägt; in welchem Jahre Christi?

Auflösung.

$$753 - 547 = 0 - x;$$

$$x = 547 - 753 = -206;$$

d. i. 206 a. Ch. n.

III. Die Rogationen des C. Canulejus und seiner Collegen geschahen 445 a. Ch. n.; in welchem Jahre der Stadt?

Auflösung.

$$753 - x = 0 - (-445);$$

$$x = 753 + (-445) = 753 - 445 = 308;$$

d. i. 308 u. c.

IV. Welches Jahr Roms ist das Jahr des Untergangs des österreichischen Reiches (oder 476 p. Ch. n.)?

Auflösung.

$$753 - x = 0 - 476;$$

$$x = 753 + 476 = 1229;$$

d. i. 1229 u. c.

* Zu mehrern derartigen Beispielen finden sich Angaben im Ueberfluß in der Geschichte.

§. 121.

Beispiele

(verschiedene, benannter Größen, welche in geraden gleichen, oder in ungeraden gleichen Differenzen zu- und abnehmen).

I. Wenn es im Orte A 1 Uhr 19 Min. 39 Sek. Nachmittags ist, so zählt der Ort U erst 11 Uhr 47 Min. 35 Sek.; wie viel Uhr wird es im letztern Orte sein, wenn der erstere 8 Uhr 26 Min. Morgens zählt?

Auflösung.

$$A - A' = U - U'.$$

Wenn die Zeit vom Nachmittag gegeben ist, so zähle man immer zur Zahl der Stunden 12 im Ansatz.

$$13^h\ 19'\ 39'' - 8^h\ 26' = 11^h\ 47'\ 35'' - x;$$

$$x = 8^h\ 26' + 11^h\ 47'\ 35'' - 13^h\ 19'\ 39'';$$

$$= 20^h\ 13'\ 35'' - 13^h\ 19'\ 39''\ 6^h\ 53'\ 56'';$$

d. i. 6 Uhr 53 Min. 56 Sek. Vormittag.

II. Wie viel Uhr zählt der Ort A, wenn der Ort U $10^h\ 57'\ 46''$ Abends hat, im Falle, daß A 36° 21′ 15″ östlicher liegt als U?

Auflösung.

* Die Sonne legt in ihrem scheinbaren Laufe von Osten nach Westen in einer Stunde $\frac{360}{24} = 15°$, in einer Minute $\frac{15°}{60} = \frac{1°}{4}$ $= 15'$, in einer Sekunde $\frac{15'}{60} = \frac{1'}{4} = 15''$ Weges zurück; daher

ist es im östlich gelegenen Orte eher Mittag als im westlichen, und zwar bei 15° östlicherer Lage eine Stunde früher...

Da A 36° 21′ 15″ östlicher liegt als U, so culminirt in A die Sonne um (36° 21′ 15″) : 15; d. i. um 2^h 25′ 30″ balder als in U. Man hat also

$$A - A' = U - U';$$

$$2^h\ 25'\ 30'' - x = 0 - 10^h\ 57'\ 46''; \text{ oder}$$

$$24^h\ 25'\ 30'' - x = 12^h - 10^h\ 57'\ 46'';$$

$$x = 14^h\ 25'\ 30'' + 10^h\ 57'\ 46'' - 12^h;$$

$$= 25^h\ 23'\ 16'' - 12^h = 13^h\ 23'\ 16'';$$

d. i. A zählt 1 St. 23 Min. 16 Sek. im nächsten Tage.

III. Von zwei Uhren, welche ganz gleichförmigen Gang haben, zeigt die eine 8^h 53′ 14″, die andere aber 8′ 47″ über 9^h; welche Zeit wird die erstere angeben, wenn die letztere 7^h 50′ 18″ hat?

Auflösung.

$$8^h\ 53'\ 14 - x = 9^h\ 8'\ 47'' - 7^h\ 50'\ 18'';$$

$$x = 8^h\ 53'\ 14'' + 7^h\ 50'\ 18'' - 9^h\ 8'\ 47'';$$

$$= 16^h\ 43'\ 32'' - 9^h\ 8'\ 47'' - 7^h\ 34'\ 45''.$$

IV. Zwei Kerzen, welche die Flamme in gleichen Zeiten um gleiche Längen verkürzt, werden in demselben Augenblicke angezündet; wie viel wird von der einen, welche 1′ 5″ 9‴ lang ist, übrig sein, wenn die andere von 2′ 3″ 5‴ bis auf 8″ 7‴ verzehrt ist?

Auflösung.

$$D - D' = E - E';$$

$$1'\ 5''\ 9''' - x = 2'\ 3''\ 5''' - 0'\ 8''\ 7''';$$

$$x = 1'\ 5''\ 9''' + 0'\ 8''\ 7''' - 2'\ 3''\ 5''';$$

$$= 2'\ 4''\ 6''' - 2'\ 3''\ 5''' = 0'\ 1''\ 1'''.$$

V. Jemand gab von seinem jährlichen Einkommen 549 fl. 36 kr. 2 pf. aus und hat sich dabei zurücklegen können 134 fl. 53 kr. 2 pf.; wie viel darf er nun ausgeben, wenn er künftig jährlich 158 fl. 48 kr. ersparen will?

Auflösung.

* Je mehr Ausgabe desto weniger Zurücklage.

$$A - A' = E' - E;$$

549 fl. 36 kr. 2 pf. — x = 158 fl. 48 kr. — 134 fl. 53 kr. 2 pf.;

x = 684 fl. 30 kr. — 158 fl. 48 kr. = 525 fl. 42 kr.

VI. Beim Verkauf einer Waare gewann Jemand 8 Bayerthaler, weil er dieselbe um 45 Kronenthaler gekauft hatte. Um denselben Preis, wie das vorigemal, verkauft er mit 21 Preußenthaler Gewinn eine andere Waare; wie theuer hatte er diese gekauft?

Auflösung.

* Je mehr Gewinn, desto weniger der Einkauf.

$$E - E' = G' - G;$$

$$45 \times 2{\cdot}7 - x = 21 \times 1{\cdot}75 - 8 \times 2{\cdot}4;$$

$$x = \frac{27 \times 9}{2} + 19{\cdot}2 - 21 \times \frac{7}{4} = 121\frac{1}{2} + 19\frac{1}{5} - \frac{147}{4};$$

$$= 140\frac{7}{10} - 36\frac{3}{4} = 103\,\frac{19}{20};$$

d. i. 103 fl. 57 kr.

§. 122.

Aufgabe.

Die mittlere arithmetische Proportionale — die Mittelzahl oder die Mittelgröße für mehrere Größen — den Werth von Mischungen... zu finden.

Auflösung in nachfolgenden Beispielen.

I. Jemand gab auf die Frage, wie alt er sei, die Antwort: „Ich habe zwei Brüder, von denen der ältere, der 15 Jahre 5 Monate 19 Tage alt ist, so viele Jahre und Tage mehr als der jüngere, mit 11 Jahren 7 Monaten 23 Tagen Alter, weniger zählt, als ich. Berechne nun, wie alt ich bin.“

Auflösung.

15 J. 5 M. 19 Tg. — x — 11 J. 7 M. 23 Tg.;

2x = 15 J. 5 M. 19 T. + 11 J. 7 M. 23 Tg.;

$x = \frac{1}{2} \times$ (27 J. 1 M. 12 Tg.) = 13 J. 6 M. 21 Tg.

II. An einem Schrannentage war der höchste Preis des Roggens 15 fl. 48 kr., der niedrigste 11 fl. 57 kr. Welches ist der Mittelpreis?

Auflösung.

15 fl. 48 kr. — x — 11 fl. 57 kr.;

2 . x = 15 fl. 48 kr. + 11 fl. 57 kr. = 27 fl. 45 kr.;

x = 13 fl. 52 kr. 2 pf.

III. Ein Landgut trug in fünf aufeinander folgenden Jahren folgende Erträge: 1256 fl. 48 kr., 1173 fl. 45 kr., 1208 fl. 36 kr., 1098 fl. 54 kr. und 1300 fl. 30 kr. Welches ist der mittlere Ertrag während dieser Jahre?

Auflösung.

Wenn die mittlere Größe für mehrere Angaben gegeben werden soll, so darf man nur die Summe der Angaben durch die Zahl derselben dividiren; also

$$\left(1256\frac{4}{5}+1173\frac{3}{4}+1208\frac{3}{5}+1098\frac{9}{10}+1300\frac{1}{2}\right):5=x;$$

$$\left(6038+\frac{33}{60}\right):5=1207+\frac{3}{5}+\frac{33}{300}=1207+\frac{213}{300};$$

d. i. 1207 fl. $42\frac{3}{5}$ kr.

IV. In einen Wasserbehälter münden sich vier Röhren, von denen B $1\frac{1}{4}$, C $1\frac{1}{3}$, D $1\frac{1}{2}$ und E $1\frac{2}{3}$ Maaß in einer Minute liefert; wie viel trifft auf jede Röhre im Durchschnitt?

Auflösung.

$$\left(1\frac{1}{4}+1\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}\right):4=x;$$

$$5\frac{3}{4}:4=\frac{23}{4\,.\,4}=1\frac{7}{16}.$$

V. Ein Weinwirth mischt 8 Maaß Wein, à 1 fl. 12 kr., mit 4 Maaß, à 1 fl. 36 kr., zusammen; welches ist der Werth des Gemisches?

Auflösung.

$$\left(8\,.\,1\frac{1}{5}+4\,.\,1\frac{3}{5}\right):12=\left(\frac{8\,.\,6}{5}+\frac{4\,.\,8}{5}\right):12;$$

$$\frac{48+32}{5\,.\,12}=\frac{80}{60}=\frac{4}{3};$$

d. i. 1 fl. 20 kr.

VI. Ein Bierwirth gießt 1 Eimer 30 Maaß Wasser in eine Mischung von 3 Eimer 45 Maaß, à Maaß 6 kr., 2 Eimer 15 Maaß, à Maaß 5 kr., Bier; welches ist der Werth der Maaß dieses Getränkes?

Auflösung.

$$\left(3\frac{3}{4}\,.\,60\,.\,6 + 2\frac{1}{4}\,.\,60\,.\,5 + 1\frac{1}{2}\,.\,0\right) : \left(\frac{15}{4} + \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right) 60;$$

$$(15\,.\,15\,.\,6 + 9\,.\,15\,.\,5) : \left(\frac{900}{2}\right) = 2025 : 450 = 4\frac{1}{2};$$

d. i. 4 kr. 2 pf.

VII. Ein Krämer mischt 1 Zt. 20 ℔. Kaffee, à ℔. 1 fl. 12 kr., mit 90 ℔., à ℔. 1 fl., und mit 1 Zt. 50 ℔., à ℔. 48 kr; welches ist der Werth des ℔. von diesem Gemische?

Auflösung.

$$\left(120\,.\,1\frac{1}{5} + 90\,.\,1 + 150\,.\,\frac{4}{5}\right) : (120 + 90 + 150) = x;$$

$$(24\,.\,6 + 90 + 30\,.\,4) : 360 = (144 + 90 + 120) : 360;$$

$$\frac{354}{360} = \frac{59}{60};$$ d. i. 59 kr.

VIII. Ein Gefäß ist gefertiget von 6 Loth Kupfer, 12 Loth $10\frac{1}{2}$löthigen und 12 Loth 12löthigen Silber; wie viel löthig ist es?

Auflösung.

$$\left(6\,.\,0 + 12\,.\,10\frac{1}{2} + 12\,.\,12\right) : 30 = \frac{6\,.\,21 + 144}{30};$$

$$\frac{126 + 144}{30} = \frac{270}{30} = 9;$$

d. i. 9löthig.

IX. Eine Legirung ist zusammengeschmolzen aus 18 Loth Kupfer, aus 12 Loth 15löthigem und 1 Mark 2 Loth 12löthigem Silber; wie viel löthig ist sie?

Auflösung.

$$(18\,.\,0 + 12\,.\,15 + 18\,.\,12) : (18 + 12 + 18) = x;$$

$$(180 + 216) : 48 = 396 : 48 = 8\frac{12}{48};$$

d. i. $8\frac{1}{4}$löthig.

II. Artikel.

Angewandte, geometrische Proportionen.

I. Punkt.

Regel de Tri.

* Mittelst der Regel de Tri (regula aurea wegen ihrer Vortrefflichkeit genannt) werden die meisten und verschiedensten Beispiele gelöst.

§. 123.

Reduktion.

Algemeines Beispiel.

Wenn M Maaße des Landes (oder Ortes) P . . . N Maaße (derselben Art) des Landes R fordern; wie viele (n) Maaße des Landes R fordern m des Landes P?

Auflösung.

1) Man bilde aus dieser allgemeinen Frage eine allgemeine geometrische Proportion, indem man sagt (da die Verhältnisse offenbar gerade zu einander sind):

$$M : m = N : n \text{ oder } m : M = n : N,$$

in welcher Formel m oder n die Unbekannte (x) bezeichnen kann.

2) In diese allgemeine Formel substituire man gehörig, wenn bestimmte Größen gegeben sind, und suche den Werth der Unbekannten nach §. 110.

* Die bestimmten Werthe von M und N sind gegeben für viele Orte und Länder in §. 119.

Beispiele.

I. Wenn 29186 franz. Meters 100000 bayer. Fuß fordern; wie viele bayer. Fuß fordert ein Meter?

Auflösung.

$$M : M' = F : F';$$

$$29186 : 1 = 100000 : x;$$

$$x = \frac{100000}{29186} = 3{\cdot}426312 \ldots \text{ §. 27.}$$

II. Wie viele englische Seemeilen fordert eine deutsche (geographische), wenn 100 deutsche 3988·58 englische Meilen geben?

Auflösung.

$$D : D' = E : E';$$

$$1000 : 1 = 3988{\cdot}58 : x;$$

$$x = 3{\cdot}98858.$$

III. Es geben 1000 geograph. Meilen 44395·08 jüdische (Sabbatherwege à zu 2000 biblischen Ellen); welches ist die Länge eines Sabbathweges?

Auflösung.

$$1000 : x = 4435{\cdot}08 : 1;$$

$$x = \frac{1000{\cdot}00}{44395{\cdot}08} = 0{\cdot}0225\ldots;$$

$$\text{d. i. } 0{\cdot}0225 \times 25380{\cdot}076 = \frac{225 \times 25380076}{10000000};$$

$$= 571{\cdot}05171 \text{ bayer. Fuß.}$$

IV. Welches ist die Länge einer römischen Meile (zu 8 olympischen Stadien); wenn 25261·4 römische Meilen 1000 geographische geben?

Auflösung.

$$R : R' = D : D';$$

$$25261{\cdot}4 : 1 = 1000 : x;$$

$$x = \frac{1000{\cdot}0}{25261{\cdot}4} = 0{\cdot}0395\ldots \text{ geogr. Meilen oder}$$

$$0{\cdot}0395 \times 25380{\cdot}076 = 1002{\cdot}513\ldots \text{ bayer. Fuß.}$$

• Ein olymp. Stadium = 125·314... bayer. Fuß.

V. Die Ἄρουρα, oder das gewöhnliche Flächenmaaß der Griechen hatte 10 gemeine Aekänen (Ἄκαινα δεκαποδης = 9 466′ bayer.) in der Länge und so viele in der Breite; wie viele Jauchart macht dieses im bayer. Maaße?

Auflösung.

$$G : G' = B : B';$$

$$100 \,.\, 9{\cdot}466 \times 9{\cdot}466 : 1 = 40000 : x;$$

$$x = 89{\cdot}4961 : 400 = 0{\cdot}22399\ldots \text{ Tagwerk.}$$

VI. Der mittlere Werth eines kleinen römischen Sestertius ist gleich 6 kr. bayer.; es fragt sich nun, welch ein Vermögen Cäsar hatte, wenn Apianus von ihm angibt: „Caesar dictator aere alieno oppressus dixit: bis millies et quingenties centena millia (numum seu sestertiorum) sibi oportere, ut nihil haberet?"

Auflösung.

250000000 kleine Sestertien = 250000000 Sechser = 25000000 fl. Cäsar hatte also 25 Millionen Gulden Schulden.

VII. Wie hoch wurde Jesus Christus, unser Erlöser, geschätzt, welcher (Matth. XXVI. 15...) um 30 Sekel (oder Silberlinge) verkauft wurde (obwohl nach III. Mos. XXVII. 3 eine Mannsperson um 50 und eine Frauensperson um 30 Sekel geschätzt werden sollte), wenn ein Silberling 1·37398 fl. gilt?

Auflösung.

$$x : 1{\cdot}37389 = 30 : 1;$$
$$x = 41{\cdot}2194.$$

* Ein Talent, eine Rechnungsmünze, war gleich 3000 Silberlinge.

§. 124.

Aufgabe.

Für zwei benannte Größen gleicher Benennung das Verhältniß in der kleinsten Form anzugeben.

Auflösung.

Man bestimme jede Einheit der zu vergleichenden benannten Größen in gleichartigen Elementen, bilde durch die Bestimmungen (mit Anwendung des Satzes: „Gleiches durch Gleiches getheilt, gibt Gleiches") eine Proportion, und suche für die Zahlen den größten gemeinschaftlichen Theiler.

* Die Elemente von den vorzüglichen Orten und Ländern enthält §. 119.

Beispiele.

I. Welches ist das kleinste Verhältniß zwischen Kronenthaler und Bayerthaler?

Auflösung.

$$1 \text{ Krnthlr.} = 2 \text{ fl. } 42 \text{ kr.} = 2\frac{7}{10} \text{ fl.};$$

$$1 \text{ Byrthlr} = 2 \text{ fl. } 24 \text{ kr.} = 2\frac{2}{5} \text{ fl.};$$

$$1 \text{ Krnthlr.} : 1 \text{ Byrthlr.} = 2\frac{7}{10} \text{ fl.} : 2\frac{4}{10} \text{ fl.} = \frac{27}{10} : \frac{24}{10};$$
$$= 27 : 24 = 9 : 8.$$

II. Welches ist die kleinste Verhältnißzahl zwischen Rottel von Constantinopel und dem Leipzigerpfund?

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{l}1\ \text{Rottel} = 1{\cdot}1380 \\ 1\ \text{Lpz. Ä.} = 0{\cdot}8343\end{array}\right\}\ \text{bayer. Ä.}$$

1 Rottel : 1 Lpz. Ä. = 1·1380 : 0·8343 = 11380 : 8343.

III. Wie verhalten sich die Antwerper und die Nürnberger Elle?

Auflösung.

1 Antw. = 0·8216;

1 Nrbgr. = 0·7880;

1 Antw. : 1 Nrbgr. = 8216 : 7880 = 1027 : 960.

Zusatz. Oefters wird blos das Näherungsverhältniß gefordert. In diesem Falle verwandelt man das Verhältniß in einen Kettenbruch (§. 93) und für diesen sucht man den Näherungswerth (§. 95).

Beispiel.

Welches ist das Näherungsverhältniß der sidertschen Umlaufszeiten der Planeten unsers Sonnensystems,
des Merkurs (☿), der 87·7969258 Tg. braucht,
der Venus (♀), die 224·700787 Tg. braucht,
der Erde (♁), die 365·255383 Tg. braucht,
der Mars (♂), der 686·979619 Tg. braucht,

der Asteroiden:
der Vesta (⚶), die 1327·598293 Tg. braucht,
der Juno (⚵), die 1593·841740 Tg. braucht,
der Ceres (⚳), die 1681·400904 Tg. braucht,
der Pallas (⚴), die 1682·945086 Tg. braucht,

des Jupiters (♃), der 4332·606308 Tg. braucht,
des Saturnus (♄), der 10758·969840 Tg. braucht,
des Uranus (♅), der 30688·713687 Tg. braucht.

Auflösung.

$$\text{Zeit}\left\{\begin{array}{l}\text{des Merkurs} = 87{\cdot}7969258 \\ \text{der Venus} = 224{\cdot}7007870\end{array}\right\}\ \text{Tag.}$$

t . ☿ : t . ♀ = 87·7969258 : 224·7007870;

$$\frac{877969258}{2247007870} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}}$$

t . ☿ : t . ♀ = 1 : 3 oder 2 : 5 oder = 7 : 18.

* Die übrigen zur Uebung.

§. 125.

Viergliedrige Beispiele der Regel de Tri (aus dem gewöhnlichen Wirthschaftsleben).

I. Bemerkungen.

1) Die Rechnungen des gewöhnlichen Lebens beziehen sich vorzüglich

a) auf Arten von Verträgen, z. B.

α) auf Austausch von Waaren, auf Kauf und Verkauf,

β) auf Ueberlassung eines Gutes (Gutes im engern Sinne oder Geldes), wo von Zins, Miethe, Vortheil... die Rede ist,

γ) auf Leistung eines Dienstes und Gegendienstes, wo um Arbeit, Lohn... es sich handelt; oder

b) auf Erfahrungen, oder...

2) Die Gesetze, welche in diesen Rechnungen zur Bildung des Rechnungsansatzes bestimmend auftreten, sprechen sich dem Verständigen sogleich deutlich aus, wenn die Sätze: „Je mehr, desto mehr" — „Je mehr, desto weniger" u. v. v. angewendet werden.

3) Ist die Bildung des Ansatzes geschehen, so löse man nach §. 110.

II. Beispiele.

I. Es werden für 5 Schfl. Roggen 24 Ell. Tuch gegeben; wie viel Schfl. wird man für 3 Stücke geben müssen?

Auflösung.

$$5 : x = 24 : 3 \,.\, 30;$$

$$x = 3 \,.\, 30 \,.\, 5 : 24 = 75 : 4 = 18\frac{3}{4}.$$

II. Von einer Waare werden $4\frac{1}{2}$ Ɏ. um 34 fl. 12 kr. verkauft; wie hoch kommen da $7\frac{2}{3}$ Ɏ.?

Auflösung.

$$4\frac{1}{2} : 7\frac{2}{3} = 34\frac{1}{5} : x;$$

$$x = \left(\frac{23}{3} \times \frac{171}{5}\right) : \frac{9}{2} = \left(\frac{23}{5} \times 57 \,.\, 2\right) : 9;$$

$$= (23 \,.\, 19 \,.\, 2) : 15 = 58\frac{4}{15};$$ d. i. 58 fl. 16 kr.

III. Jemand bezahlt für ein Landgut, welches er in Pacht übernahm und welches 4500 fl. werth ist, 332 fl. 30 kr. Pacht; wie viel soll im Verhältniß des angegebenen Falles für ein Landgut, welches zu 15750 eingeschätzet ist, Pacht bezahlt werden?

Auflösung.

$$4500 : 15750 = 332\frac{1}{2} : x;$$

$$100 : \quad 175 = 665 : x = 4 : 7;$$

$$x = 4655 : 4 = 1163\frac{3}{4}.$$

IV. Ein Kapital, welches zu 3 fl. 45 kr. pc. angelegt ist, trägt jährlich 360 fl. Zins; wie viele Gulden hält dieses Kapital?

Auflösung.

$$100 : x = 3{\cdot}75 : 360;$$

$$x = 3600000 : 375 = 9600.$$

V. Wie viel jährliches Miethgeld wird ein Haus eintragen, welches im Werth von 3545 fl. eingeschätzt ist, wenn für 100 fl. Schätzungswerth 6 fl. Miethe zu nehmen sind?

Auflösung.

$$100 : 3545 = 6 : x;$$

$$x = 20270 : 100 = 202{\cdot}7;$$

d. i. 202 fl. 42 kr.

VI. Wie groß muß ein Kapital sein, damit es jährlich zu 4 fl. 30 kr. pc. 877 fl. 30 kr. Zinsen trage?

Auflösung.

$$100 : x = 4{\cdot}5 : 877{\cdot}5 = 5 : 975 = 1 : 195;$$

$$x = 19500.$$

VII. Wie lange muß ein Gut, welches 4750 fl. gekostet hat in Pacht sein, damit es bei 422 fl. 30 kr. jährlichen Pacht, so viel trägt, als es gekostet hat?

Auflösung.

$$x : 1 = 4750 : (855 : 2);$$

$$x = 9500 : 855 = 11\frac{1}{9};$$

d. i. über 11 Jahre.

VIII. Wie lange muß ein Kapital bei 5 pc., dann bei 4 pc. ausliegen, wenn es durch die jährl. Zinsen bezahlt werden soll?

Auflösung.

a) $x : 1 = 100 : 5;$

$x = 20.$

b) $x : 1 = 100 : 4;$

$x = 25.$

* Wenn diese jährlichen einfachen Zinsen nicht eingenommen werden, so wächst ein Kapital zu 5 pc. in 20 Jahren und zu 4 pc. in 25 Jahren zum Doppelten; viel schneller geht dieses Wachsen bei Zinszinsen...

IX. Ein junger Mann hat außer Kost und Trunk bei einem Herrn alle 5 Wochen 3 Kronenthaler Lohn; wie viele Gulden wird er einnehmen für $3\frac{1}{2}$ Jahre?

Auflösung.

$$3 : \frac{7}{2} \times 52 = \frac{27}{10} . 5 : x;$$

$$3 : 7 . 26 = \frac{27}{2} : x;$$

$$1 : 7 . 13 = 9 : x;$$

$$x = 9 . 7 . 13 = 819.$$

X. Man fand durch Beobachtung, daß die Anzahl der Kubikfuße vom Stammholze sich um ein Drittel vermehrt erscheine, wenn es gespalten gemessen wird. Wie viele bayer. Klafter Scheiterholz geben 315 Kubikfuß Stammholz?

Auflösung.

$$1 : \frac{315}{126} = 1\frac{1}{3} : x;$$

$$126 : 315 = \frac{4}{3} : x;$$

$$3 . 2 : 5 = 4 : x;$$

$$x = 10 : 3 = 3\frac{1}{3}.$$

XI. In einem Orte verzehrt die Mannschaft von dem dortigen Militär täglich 9 Ztr. 45 ℔. Fleisch, indem immer 4 Mann 3 ℔. miteinander erhalten. Wie stark ist die Mannschaft?

Auflösung.

$$4 : x = 3 : 945;$$

$$x = 4780 : 3 = 1260.$$

XII. Wenn 1600 Mann mit 10 Ztr. Fleisch täglich ausreichen sollen; wie viele ℔. dürfen dann je 4 Mann erhalten?

Auflösung.

$$4 : 1600 = x : 1000;$$

$$x = 40 : 16 = 5 : 2 = 2\frac{1}{2} \text{ ℔.}$$

XIII. Zur Vollendung einer bestimmten Arbeit brauchen 10 Arbeiter 9 Tag; wie viel Zeit werden 15 Arbeiter brauchen?

Auflösung.

$$Ar : Ar' = Z' : Z;$$

$$10 : 15 = x : 9;$$

$$x = 18 : 3 = 6.$$

XIV. Mit einem gewissen Habervorrath können 40 Pferde 1 Jahr $4\frac{1}{4}$ Woche verhalten werden; wie lange können mit demselben Vorrath 25 Pferde erhalten werden?

Auflösung.

$$P : P' = Z' : Z;$$

$$40 : 25 = x : 56\frac{1}{4};$$

$$10 : 25 = x : 225;$$

$$x = 2250 : 25 = 90.$$

XV. Ein Soldat sollte wegen eines geringen Diebstahls 6mal durch 400 Mann Spitzruthen laufen; er lief aber 15mal und bekam die ihm bestimmte Anzahl Streiche. Durch wie viel Mann wurde er gestraft?

Auflösung.

$$M : M' = L' : L;$$

$$400 : x = 15 : 6;$$

$$x = 2400 : 15 = 160.$$

XVI. Mit einem gewissen Quantum Mörtel kann eine Mauer von 3150 □' Oberfläche $\frac{1}{3}$' dick angeworfen werden; wie dick darf der Anwurf werden, wenn die Oberfläche 4200 □' beträgt?

Auflösung.

$$F : F' = D' : D;$$

$$3150 : 4200 = x : \frac{1}{3};$$

$$105 : 420 = x : 1;$$

$$x = 105 : 420 = \frac{1}{4}.$$

XVII. Es soll ein Bethhaus mit Bruchsteinen gepflastert werden. Man fand, daß wenn eine Platte $1\frac{3}{4}$ □' halte genau 940 Stücke nöthig sind; wie viel aber braucht man von solchen, deren jede $2\frac{1}{3}$ □' hält?

Auflösung.

$$\square : \square' = Z' : Z;$$

$$1\frac{3}{4} : 2\frac{1}{3} = x : 940;$$

$$3 . 7 : 4 . 7 = x : 940;$$

$$x = 2820 : 4 = 705.$$

§. 126.

I. Reesische Regel (§. 113. b. α).

1) Die Reesische Regel unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Proportionsansatze dadurch, daß in ihr die äußern Glieder der Proportion auf die linke, die mittleren auf die rechte Seite eines lothrechten Striches unter einander gesetzt werden. Es ist dann das Produkt der Glieder der einen gleich dem der Glieder der andern Seite.

2) Man hat hier ebenfalls die 3 Momente (§. 114)

a) Formation,

b) Reduction, und

c) Solution.

a.

Die unbekannte Größe (x) steht immer auf der dem linken Auge gegenüberstehenden Seite oben; das Frageglied, wenn das Verhältniß ein gerades ist, auf der rechten, wenn das Verhältniß ein verkehrtes ist, auf der linken Seite. Die mit diesen Gliedern gleichbenannten Zahlen,

welche im andern Theile der Aufgabe vorkommen, müssen immer auf die entgegengesetzte Seite gesetzt werden.

* In zusammengesetzten Proportionen bedient man sich dieser Regel gerne. In ihr müssen immer auf einer Seite so viele Glieder sein, als auf der andern.

b.

Wenn strenge Gleichartigkeit aller homologen Glieder hergestellt ist, so wird durch die Reduction vereinfacht, indem man auf beiden Seiten immer ein Glied dividirt oder multiplicirt.

* Man sorge, daß man durch Reduction auf beiden Seiten absolute Primzahlen erhalte.

c.

Die Solution geschieht, wenn man das Produkt aus den Faktoren der rechten Seite theilt durch das Produkt der bekannten Glieder der linken Seite und x gleich setzt.

Beispiele.

I. Es werden $\frac{2}{3}$ ℔. einer Waare um 1 fl. 50 kr. gekauft; was werden $28\frac{1}{2}$ ℔. von derselben Waare kosten?

Auflösung.

a) Ansatz	x	$28\frac{1}{2}$ ℔. (Frageglied)
	$\frac{2}{3}$ ℔.	$1\frac{5}{6}$ fl.
	x	59
b) Redukt.	3.2×2.2	11.3

c) Solution $x = \frac{59.11}{8} = \frac{609}{8} = 76\frac{1}{8}$;

d. i. 76 fl. 7 kr. 2 pf.

II. Zu wie viel Prozent muß ein Kapital von 37500 fl. angelegt werden, damit es in $2\frac{2}{3}$ Jahre 1500 fl. Zins trage?

Auflösung.

x	100 K. 1 J.
$2\frac{2}{3}$ J. 37500 K.	1500 fl.
2.4.375.x	375.4.3.3

$x = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$.

III. Ein Quantum Garn gibt $1\frac{1}{5}$ Ellen breites Stück Leinwand, welches $91\frac{2}{3}$ Ellen Länge hat; welche Breite enthält von demselben Quantum Garn ein Stück, welches $62\frac{6}{7}$ Ellen lang ist?

Auflösung.

x Br.	$1\frac{1}{5}$ Br.
$62\frac{6}{7}$ L.	$91\frac{2}{3}$ L.
$\frac{440}{7} \cdot x$	$\frac{6}{5} \times \frac{275}{3} = 2 \cdot 55 = 110.$

$$x = \frac{7 \cdot 110}{440} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

II. Wälsche Praktik.

1) Die **wälsche** oder **italienische** Praktik ist ein Inbegriff von Rechnungsvortheilen, wodurch die Auflösung der Regel de Tri-Beispiele **abgekürzt** und **erleichtert** wird.

* Diese Rechnungsvortheile werden vorzügliche Uebung lehren.

2) Die Hauptregel der wälschen Praktik lautet:

„**Suche die Regel de Tri in eine einfache Multiplication und Division zu verwandeln, so daß die Summe der einzelnen Produkte oder Quotusse (welche sich größtentheils in dem Sinne berechnen lassen) den Werth für die unbekannte Größe gibt.**"

Beispiele.

I. Von einer Waare kosten 25 ℔. 20 fl. 50 kr.; was werden 9 ℔. kosten?

Auflösung.

Wenn 25 Pfd. 20 fl. 50 kr. kosten, so kostet

1 Pfd. $\frac{20}{25}$ fl. $\frac{50}{25}$ kr. $= \frac{4}{5}$ fl. 2 kr. $=$ 50 kr.; daher

9 Pfd. 50 . 9 kr. $=$ 450 kr. $=$ 7 fl. 30 kr.

II. Eine Arbeit fertigen 12 Arbeiter in 15 Tage; wie viele Tage werden 10 Arbeiter brauchen?

Auflösung.

Von 12 Arbeitern wird die ganze Arbeit in 15 Tagen vollendet, folglich vollendet 1 Arbeiter in 15 Tagen $\frac{15}{12}$ Thl., und 1 Arbeiter in 1 Tag $\frac{1}{12 \,.\, 15}$ Thle. von der ganzen Arbeit, daher 10 Arbeiter in 1 Tag $\frac{10}{180}$ Thle. und 10 Arbeiter in 18 Tagen die ganze Arbeit.

§. 127.

Zusammengesetzte Proportionen (§. 113. b. α).

1. Erklärungen.

1) Wenn ein Ding so beschaffen ist, daß seine Zunahme oder Abnahme nicht blos von der Zunahme oder Abnahme eines einzigen andern, sondern mehrerer anderer Dinge abhängt, so ist es nicht genug, sein Verhältniß mit dem Verhältniß eines dieser Dinge zu vergleichen, sondern es muß mit den Verhältnissen aller verglichen werden; denn es sind alle Glieder bestimmend. Indessen ist es doch nicht nothwendig, daß man aus einer einzigen Aufgabe durch weitläufige Zerlegung mehrere Proportionen bildet; man kann mit einer einzigen Rechnung fertig werden, indem man die mehrmals wiederholte Regel de Tri in eine einzige zusammenzieht.

2) Eine Rechnung dieser Art wird (nach der verschiedenen Anzahl der in einer Aufgabe gegebenen und bestimmenden Glieder) genannt

Regel de Quinque, wenn fünf Glieder in ihr gegeben sind,
Regel de Septem, „ sieben „ „ „ „ „
Regel de Novem, „ neun „ „ „ „ „

* In diesen Rechnungen sind wenigstens die Glieder eines Verhältnisses Produkte aus zwei oder mehreren Faktoren.

3) Das Schwierige bei der Auflösung von zusammengesetzten Proportionen ist wieder die Formation. Man nennt allgemein die Ursachen bestimmende Größen, die Wirkungen aber bestimmte; sagt dann, die Ursachen und Wirkungen stehen in einem gegenseitigen geraden Verhältnisse, d. i. mit dem multiplicativen Wachsen oder Fallen

der Ursachen ist auch ein multiplicatives Wachsen oder Fallen der Wirkungen verbunden — und bildet die Proportion.

* Sehr bequem werden die zusammengesetzten Proportionen mittelst des Reesischen Ansatzes und dann durch die sogenannte Kettenregel gelöst.

II. Beispiele.

I. Fünf Schreiber copiren in 30 Tagen 1125 Bogen; in wie viel Tagen werden 45 Bogen von 3 Schreibern copirt werden?

Auflösung.

$$A \,.\, Z : A' \,.\, Z' = M : M';$$
$$5 \,.\, 30 : 3 \,.\, x = 1125 : 45;$$
$$50 : x = 125 : 5 = 25 : 1;$$
$$x = 2.$$

II. Auf einem Acker, welcher 48′ lang und 32′ breit ist, wurden 36 Garben gesammelt; wie viele Garben sollen verhältnißmäßig auf einem andern von gleicher Güte stehen, welcher 60′ lang und 48′ breit ist?

Auflösung.

$$L \,.\, B : L' \,.\, B' = M : M';$$
$$48 \,.\, 32 : 60 \,.\, 48 = 36 : x;$$
$$2 : 15 = 9 : x;$$
$$x = \frac{135}{2} = 67\frac{1}{2}.$$

III. Ein Fuhrmann will einem Handelsmanne, der hiefür 15 Bayerthaler zu zahlen verspricht, 9 Ztr. 30 Meilen weit führen. Nun legt der Kaufmann um 12 Ztr. mehr auf, läßt diese Last aber nur 15 Meilen weit führen; wie viele Gulden muß er jetzt im Verhältnisse bezahlen?

Auflösung.

$$L \,.\, W : L' \,.\, W' = G : G';$$
$$9 \,.\, 30 : 21 \,.\, 15 = 15 \,.\, 2\frac{2}{5} : x;$$
$$1 : 7 = 6 : x;$$
$$x = 42; \text{ d. i. } 42 \text{ fl.}$$

IV. In einer Festung sind 4320 Mann, welche auf $10\frac{1}{2}$ Monate, wenn jedem Manne $2\frac{1}{2}$ ℔. täglich gereicht werden, Mundvorrath haben. Wenn nun 1520 Mann aus-

marschieren, und die Mannschaft 18 Monate ausreichen soll; wie viel ℔. darf dann jedem Manne täglich gereicht werden?

Auflösung.

$$M \,.\, Z : M' \,.\, Z' = ℔ : ℔';$$

$$4320 \,.\, 10\frac{1}{2} : 2800 \,.\, 18 = 2\frac{1}{2} : x;$$

$$24 \,.\, 21 : 280 \,.\, 2 = 5 : 2 \,.\, x;$$

$$8 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, 3 : 7 \,.\, 8 \,.\, 5 = 5 : x;$$

$$x = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}.$$

V. Ein Gefäß für Flüssigkeit ist 12′ lang, 5′ breit und 3′ tief; welche Tiefe müßte ein anderes erhalten, wenn es bei einer Länge von 10′ und einer Breite von $4\frac{1}{2}$′ dasselbe Quantum wie ersteres fassen soll?

Auflösung.

$$L \,.\, Br \,.\, T : L' \,.\, Br' \,.\, T' = Q : Q';$$

$$12 \,.\, 5 \,.\, 3 : 10 \,.\, 4\frac{1}{2} \,.\, x = 1 : 1;$$

$$4 \,.\, 3 \,.\, 3 : 3 \,.\, 3 \,.\, x = 1 : 1;$$

$$x = 4'.$$

VI. An der Verfertigung eines Kanals, welcher 480000 Fuß lang 30′ breit und 10′ tief ist, arbeiteten 6250 Mann 24 Wochen bei täglich 12stündiger Arbeit. Wie viel Arbeiter müßte man haben, wenn sie einen Kanal von 7200′ Länge, 20′ Breite und 8′ Tiefe in der halben Anzahl von Tagen bei täglich 10stündiger Arbeit fertigen sollen?

Auflösung.

$$A \,.\, Z : A' \,.\, Z' = L \,.\, B \,.\, T : L' \,.\, B' \,.\, T,;$$

$$6230 \,.\, 1 \,.\, 12 : x \,.\, \frac{1}{2} \,.\, 10 = 480000 \,.\, 30 : 10 : 7200 \,.\, 20 \,.\, 8;$$

$$1250 : x = 4000 \,.\, 3 : 144 \,.\, 8 = 500 : 48;$$

$$x = \frac{2500 \times 48}{1000} = 120000 : 1000 = 120.$$

Nach der Reesischen Regel:

Arb. x	7200 L.	x	6250
W. ½	20 B.	1	. 2
St. 10	8 t.	10	12
L. 480000	6250 Arb.	4800	72
B. 30	1 W.	3	. 2
t. 10	12 St.	10	8

$$x \,.\, 144 \,.\, 10000 = 25000 \,.\, 144 \,.\, 48;$$
$$10\,x = 25 \,.\, 4 \,.\, 12 = 1200;$$
$$x = 120.$$

VII. Es wurde eine Mauer 600′ lang und 15′ hoch und 3′ dick aufgeführt. Man mußte um die Steine hiezu herbeizubringen mit 10 Wägen $10\frac{1}{2}$ Wochen arbeiten, weil der Ziegelofen vom Bauplatze 3 Stunden Wegs entfernt lag und weil man nur 225 Stück Steine auf jeden Wagen auflegen durfte. Wenn nun eine andere Mauer von 320′ Länge, 12′ Höhe und $2\frac{1}{2}$′ Dicke zwei Stunden Wegsentfernung von einem Ziegelofen aufgeführt werden soll; mit wie vielen Wägen wird man arbeiten müssen, wenn man in 5 Wochen die Steine herbeiführen will und wenn auf jeden Wagen 280 Stücke geladen werden?

Auflösung.

Es sei

L u. L′ = Länge;	W u. W′ = Wägen;
H „ H′ = Höhe;	T „ T′ = Tage,
D „ D′ = Dicke;	Z „ Z′ = Zahl d. Steine.
E „ E′ = Entfernung.	

$$L.H.D.E : L'.H'.D'.E' = W.T.Z : W'.T'.Z';$$
$$600 \,.\, 15 \,.\, 3 \,.\, 3 : 320 \,.\, 12 \,.\, \frac{5}{2} \,.\, 2 = 10 \,.\, 10\frac{1}{2} \,.\, 225 : x \,.\, 5 \,.\, 280;$$
$$6 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 : 4 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 6 \,.\, 5 = \frac{21}{2} \,.\, 45 \,.\, 5 : x \,.\, 5 \,.\, 280;$$
$$3 \,.\, 3 \,.\, 3 : 4 ; 8 = 7 \,.\, 3 \,.\, 9 \,.\, 5 : x \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 5;$$
$$x = 4.$$

Nach dem Reesischen Ansatz:

W . x	320 L.		x	4 . 40
T . 5	12 H.		5	2 . 6
Z . 280	$2\frac{1}{2}$ D.		7 . 40	2 . 5
L . 600	2 E.		100 . 6	5
H . 15	10 W.		5 . 3	7 . 3
D . 3	$10\frac{1}{2}$ t.		3 . 3	6 . 45
E . 3	225 z.			

x = 4.

VIII. Wie viele Bayerthaler kostet 1 Ballen Schreibpapier, wenn 1 Bogen 3 Heller kostet?

Auflösung.

$$B : B' = W : W';$$

$$x : \frac{3}{8.60.2\frac{2}{5}} = 10.20.24 : 1;$$

$$x : 3 . 5 = 10.20.12.2 : 8.20.3.12;$$

$$x = \frac{5.5.2.2}{4.2} = 12\frac{1}{2}.$$

* Nach der Kettenregel.

Kettenregel ist die Vorschrift, wie die Vergleichung zweier Größen von verschiedenen durch Mittelgrößen angestellt wird.

Wenn mehrere Proportionen so miteinander in Verbindung gesetzt werden, daß der Nachsatz der vorhergehenden Proportion der Vordersatz der nachfolgenden wird, so entsteht ein Kettensatz.

Ein Kettensatz wird nach §. 111. 2 in eine Proportion verwandelt.

1 B. Thl.	: 1 Ballen	=	1	:	x;
1 Ballen	: 1 Rieß	=	10	:	1;
1 Rieß	: 1 Buch	=	20	:	1;
1 Buch	: 1 Bogen	=	24	:	1;
1 Bogen	: 1 Heller	=	3	:	1;
1 Heller	: 1 Kreuzer	=	1	:	8;
1 Kreuzer	: 1 Gulden	=	1	:	60;
1 Gulden	: 1 B. Thl.	=	1	:	$2\frac{2}{5}$; folglich

$$1 \text{ B. Thl.} ; 1 \text{ B. Th.} = 1 : 1 = 10.20.24.3 ; 8.60 . \frac{12}{5} . x$$

$$5 . 2 . 5 . 12 . 2 = 2 . 4 . 12 . x;$$

$$x = 25 : 2 = 12\frac{1}{2}.$$

IX. Anton Friedrich Mesmer, ein Arzt, berühmt durch den Mesmerismus (Magnetismus), welchen er zuerst im Jahre 1766 zu Wien lehrte, verkaufte seine Kurgeheimnisse zu Paris für 10000 Luisd'or. Wie viel beträgt diese Summe in bayer. Kronenthalern, wenn 1 Luisd'or preußische 5 Thaler

im Golde, 100 Thlr. im Golde gleich 110 Thlr. im Conventionsgeld, $13\frac{1}{3}$ Conventionsgeld 14 Thlr. preuß. Courant, 4 preuß. Thaler Courant 7 bayer. Gulden und $2\frac{7}{10}$ fl. = 1 Kronenthaler sind?

Auflösung.

1 Kr. Thlr.	: 1 fl.	= 2·7 : 1;
1 fl.	: 1 prß. Th. Cour.	= 4 : 7;
1 prß. Thlr. Cour.	: 1 Thl. Conv.	= $13\frac{1}{3}$: 14;
1 Thlr. Conv.	: 1 Thlr. im Golde	= 100 : 110 = 10 : 11;
1 Thlr. im Golde	: 1 Luisd'or	= 1 : 5;

1 Kr. Thl. : 1 Luisd'or = 27 . 4 . 40 . ~~10~~ : ~~10~~ . 7 . 42 . 11 . 5;

9 . 2 . 40 Luisd'or = 7 . 7 . 11 . 5 Kr. Thlr.;

$$1 \text{ Luisd'or} = \frac{539}{18.8} = \frac{539}{144} = 3·743055\ldots$$

10000 Luisd'or = 37430·5 Kr. Thlr.

X. Die Aqua Appia war die älteste römische Wasserleitung. 365 a. Ch. n. angelegt, kam von Tibur und machte einen Lauf von 42000 altrömischen Schritten, meistens unter der Erde. Wie lange war diese Wasserleitung in bayerischen Fußen, wenn 0 68 bayer. Ellen = 1 Dresdner, eine solche = 2 Dresdn. Fuß, 1 Dresdn. Fuß = 125·568 par. Linien, 131·325 par. Linien 1 altröm. Fuß und 5 altröm. Fuß = ein altröm. Schritt sind?

Auflösung.

1 bayr. Fuß	: 1 ds. Elle	= 1 : 0·68;
1 ds. Elle	: 1 ds. Fuß	= 2 : 1;
1 ds. Fuß	: 1 par. Linie	= 125·568 : 1;
1 par. Linie	: 1 röm. Fuß	= 1 : 131·325;
1 röm. Fuß	: 1 röm. Schritt	= 1 : 5;

1 bayer. Fuß : 1 röm. Schritt = 2 . 125·568 : 0·68 . 131·325 . 5;

= 251·136 : 3·4 . 131·325;

$$1 \text{ röm. Schritt} = \frac{34 . 131·325}{251 . 1360} = \frac{34 . 131325}{2511360};$$

$$\text{Aq. App.} = \frac{34 . 131325 . 4200}{251136} = 74673·54\ldots \text{ bayer. Fuß.}$$

XI. Im Jahre 1830 zersprang in Manchester in Mottram's Bräuerei ein Faß mit Porterbier, welches 630 Hogsheads enthielt. Es schwemmte hiebei das Fässermagazin fast gänzlich weg und ersäufte die Arbeiter in seinen Fluthen. Wie viel bayer. Eimer enthielt dieses Gefäß Nektar, da ein Hogshead = 65 Gallons, ein Gallon = 3·264 wien. Maaß, $42\frac{1}{2}$ wien. Maaß = 1 wien. Eimer = 0·9376 bayerische Eimer sind?

Auflösung.

$$1 \text{ bayer. Eim.} : 1 \text{ wien. Eimer} = 1 : 0{\cdot}9376;$$
$$1 \text{ wien. Eim.} : 1 \text{ wien. Maaß} = 42\frac{1}{2} : 1;$$
$$1 \text{ wien. Maaß} : 1 \text{ Glln.} = 1 : 3{\cdot}264;$$
$$1 \text{ Glln.} : 1 \text{ Gghd.} = 1 : 65.$$

$$1 \text{ bayer. Eim.} : 1 \text{ Hghd.} = \frac{85}{2} : 0{\cdot}9376 . 3{\cdot}264 . 65;$$
$$1 \text{ Hghd.} = \frac{1{\cdot}8752 \quad 3264 . 13}{17} = 4{\cdot}6805;$$
$$x = 630 = 4{\cdot}6805 = 2948{\cdot}715.$$

II. Punkt.

Gesellschaftsrechnungen (§. 113. b. β).

§. 128.

Erklärungen.

1) Gesellschaftsrechnungen sind Arten von Regel de Tri. Sie werden dann gebraucht, wenn gefordert wird, daß irgend eine Größe in mehrere ungleiche, aber doch zu einander im Verhältniß stehende Theile getheilt werden soll (§. 112). Man bedient sich ihrer in vielen Fällen des Lebens.

2) In einigen Arten von Gesellschaftsrechnungen, z. B. in der sogenannten Gewinn- und Verlustrechnung, in Handlungsrechnungen überhaupt... kommen Ausdrücke und wirkende Ursachen vor, von denen die Wortbedeutung und die erzeugten Wirkungen dem Rechner bekannt sein sollen. Z. B.

Gewinn und Verlust bei n Einheiten,

Tara,

Fusti, Gutgewicht,
Spesen,
Rabatt, Agio.

In solchen Rechnungen ist dann öfters ein vermittelndes Verhältniß aus einer beliebigen Zahl n (z. B. aus 100) zu bilden, welches so geschieht, daß man der beliebigen Zahl (welche auch bestimmende Einheit ist)

eine Zahl gibt, und somit auf n rechnet, oder
„ „ nimmt, und somit von n rechnet, und

aus der Zahl (n) und der Summe oder Differenz ein Verhältniß formirt. Ist das vermittelnde Verhältniß gebildet, so kann die zu lösende Proportion leichs gelöst werden.

I. Für Gewinn und Verlust ist zu merken, daß, wenn das Ganze verliert oder gewinnt, auch die Theile verlieren oder gewinnen u. v. v.

II. Tara heißt bei Kaufleuten u. dgl. das Gewicht der Fässer, Kisten, Umschläge überhaupt, welche sammt der Waare gewogen werden müssen.

A. Wenn die Waare aus dem Umschlage herausgenommen werden kann, so wird dieser allein gewogen. Das Gewicht der Waare nach abgezogenen Tara heißt Netto (reine Waare); das Gewicht mit dem Tara (sammt Emballage) wird **Sporco**, **Brutto** (unlautere Waare) genannt.

B. Wenn sich die Waare nicht wohl aus dem Umschlage nehmen läßt, sondern mit diesen gewogen und also als Sporco bezahlt werden muß, so gibt der Verkäufer einige Pfunde auf den Zentner darein, und dieses heißt Tara auf den Zentner. Hier wird die Waare nur sporco gewogen, aber nicht mehr netto bestimmt; — oder der Verkäufer gibt einige Pfunde von dem Zentner, d. h. er läßt sich seine Waare nicht ganz bezahlen.

* Allgemein hat man für Tara auf und von n : (n $\pm$ t).

III. Fusti, Gutgewicht.

Wenn Waaren auf dem Transporte beschädigt werden, oder wenn sich bei einer Lieferung Waaren von minderer Güte

(Ausschuß) finden, so muß sich der Verkäufer einen Abzug gefallen lassen, welcher Fusti heißt.

Gutgewicht ist ein Abzug, welchen bei Bezahlung einer größern Waarenlieferung der Großhändler dem Krämer in der Art gestattet, daß dieser eine kleinere Waarenmenge zahlen darf, als er wirklich empfängt.

IV. Spesen heißen Auslagen auf Transport, Zölle, Besorgung ... der Waaren.

Einkaufsspesen werden auf n berechnet (n + sp), weil sie den Preis der Waare erhöhen; die Verkaufsspesen von n (n — sp), weil sie die Einnahme vermindern.

V. Rabatt, Agio.

A. Wird eine Zahlung, welche erst nach einiger Zeit ohne Interessen gemacht werden mußte, sogleich geleistet (kontante Zahlung), so muß sich der Gläubiger einen Abzug gefallen lassen, welcher Rabatt heißt.

B. Werden Münzen gegen andere von gleichem Werthe so verwechselt, daß den Einen für den Wechsel etwas zugelegt werden muß, so heißt die Zulage bei den geringer geachteten Agio, und das Abgezogene von den höher geschätzten Diskonto.

§. 129.

Beispiele mit Auflösungen.

I. Das Heer des Herzogs Karl des Kühnen von Burgund, welches am 2. März 4476 bei Grandson von den Schweizern geschlagen wurde, verhielt sich zu dem der Feinde wie 2 : 7. Wie stark war jedes, wenn beide 90000 Mann zählten?

Auflösung.

$$(2 + 7) : 90000 = 2 : x;$$
$$1 : 10000 = 7 : y;$$
$$x = 20000;$$
$$y = 70000.$$

II. Die Stadt Padua, der Geburrsort Livius, hat 117 Kirchen und Klöster, welche sich wie 5 : 8 verhalten. Wie viel sind dort Kirchen und Klöster?

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{r}(5+8):117\\ 13:117\end{array}\right\}\begin{array}{l}=5:x;\\ =8:y;\end{array}$$

$$1:\ 9\ =\begin{array}{l}5:x;\\ 8:y.\end{array}$$

$$x=45;$$
$$y=72.$$

III. Sevilla hat 210 Thore, Kirchen und Klöster. Es trefen so oft 14 Klöster, als 19 Kirchen und 2 Thore; wie viel von jeder Art Gebäude sind in dieser Stadt?

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{r}(14+19+2):210\\ 35:210\\ 1:\ \ 6\end{array}\right\}\begin{cases}=14:x;\\ =19:y;\\ =\ \ 2:z.\end{cases}$$

$$x=\ 84;$$
$$y=114;$$
$$z=\ 12.$$

IV. Der österreichische St. Stephansorden, 1764 von Maria Theresia zur Ehre des heiligen Stephan, Königs von Ungarn, gestiftet, soll nicht mehr als 100 Mitglieder, nämlich Großkreuze, Comthurs und Ritter erhalten, welche sich zu einander verhalten wie 2 : 3 : 5; wie viel Großkreuze, Comthurs und Ritter soll demnach dieser Orden haben?

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{r}(2+3+5):100\\ 1:\ 10\end{array}\right\}\begin{array}{l}=2:x;\\ =3:y;\\ =5:z.\end{array}$$

$$x=20;$$
$$y=30;$$
$$z=50.$$

V. Die Summe der Diebe, Bettler und Spieler von Profession in London soll 60000 betragen. Wenn sich diese wie 3, 2 und 1 verhalten; wie viel von jeder Gattung dieses Gesindels befindet sich zu London?

Auflösung.

$$(3+2+1) : 60000 = \begin{matrix} 3 : x; \\ 2 : y; \end{matrix}$$
$$1 : 10000 = 1 : z.$$
$$x = 30000;$$
$$y = 20000;$$
$$z = 10000.$$

VI. In einer Kolonie befinden sich 35550 Hausthiere, und zwar so oft 3 Pferde, 24 Stücke Hornvieh, 110 Stücke Schafe als 100 Stücke Schweine. Wie groß ist die Zahl jeder einzelnen Thiergattung?

Auflösung.

$$\left.\begin{matrix} (3+24+110+100) : 35550 \\ 237 : 35550 \\ 1 : 150 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = 3 : x; \\ \ 24 : y; \\ = 110 : z; \\ = 100 : w. \end{matrix}$$
$$x = 450;$$
$$y = 3600;$$
$$z = 16500;$$
$$w = 15000.$$

VII. Die Anzahl der Hochöfen, Hämmer, Bohrmaschinen, Spitz- und Polirmühlen in der Gewehrfabrik zu St. Etienne beträgt 435. Die genannten Fabriksgegenstände verhalten sich wie $1\frac{3}{8} : 3\frac{1}{4} : 5\frac{7}{8} : 30\frac{7}{8} : 13$, welches ist die Zahl für die Hochöfen, Bohrmaschinen ...?

Auflösung.

$$\left.\begin{matrix} 54\frac{3}{8} : 435 \\ \\ 435 : 435 \,.\, 8 \\ 1 : 8 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = 1\frac{3}{8} : x; \\ \ 3\frac{1}{4} : y; \\ = 5\frac{7}{8} : w; \\ = 30\frac{7}{8} : v; \\ \ 13 : z. \end{matrix}$$

$$x = \frac{11}{8} \times 8 = 11;$$

$$y = \frac{13}{4} \times 8 = 26;$$

$$w = \frac{47}{8} \times 8 = 47;$$

$$v = \frac{247}{8} \times 8 = 247;$$

$$z = 13 \,.\, 8 = 104.$$

VII. Zu dem deutschen Bundesheere haben die vier freien Städte 2660 Mann zu stellen, und zwar im Verhältnisse Lübeck 1·0175; Frankfurt 1·175; Bremen 1·2125 und Hamburg 3·245. Wie viel Mann hat jede dieser Städte zu stellen?

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{r} 6{\cdot}65 : 2660 \\ 133 : 53200 \\ 1 : 400 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 1{\cdot}0175 : x; \\ = 1{\cdot}175 : y; \\ = 1{\cdot}2125 : w; \\ = 3{\cdot}245 : z; \end{array}$$

$$x = 101{\cdot}75 \,.\, 4 = 407;$$
$$y = 117{\cdot}5 \,.\, 4 = 470;$$
$$w = 121{\cdot}25 \,.\, 4 = 485;$$
$$z = 324{\cdot}5 \,.\, 4 = 1298.$$

IX. Es sollen unter vier Personen 936 fl. 40 kr. in ungleiche Theile vertheilt werden, welche sich zu einander verhalten wie 10 : 1 : 0·2 : 0·04; wie viel enthält jede?

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{r} 11{\cdot}24 : 936\frac{2}{3} \\ 33{\cdot}72 : 2810 \\ 3 : 250 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 10 : x; \\ = 1 : y; \\ = 0{\cdot}2 : w; \\ = 0{\cdot}04 : z. \end{array}$$

$x = 2500 : 3 = 833\frac{1}{3}$; d. i. 833 fl. 20 kr.;

$y = 250 : 3 = 83\frac{1}{3}$; d. i. 83 fl. 20 kr.;

$w = 50 : 3 = 16\frac{2}{3}$; d. i. 16 fl. 40 kr.;

$z = 10 : 3 = 3\frac{1}{3}$; d. i. 3 fl. 20 kr.

X. Vier Bauern, von denen A $1\frac{1}{4}$, B 1, C $\frac{3}{4}$ und D $\frac{1}{2}$ Hof besitzt, sollen miteinander 280 fl. bezahlen. Wie viel muß jeder einzelne beitragen?

Auflösung.

$$
\left.\begin{array}{l} 3\frac{1}{2} : 280 \\ 7 : 560 \\ 1 : 80 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = \frac{5}{4} : x; \\ = 1 : y; \\ = \frac{3}{4} : w; \\ = \frac{1}{2} : z; \end{array}
$$

$$x = 80 . \frac{5}{4} = 100;$$

$$y = 80 . 1 = 80;$$

$$w = 80 . \frac{3}{4} = 60;$$

$$z = 80 . \frac{1}{2} = 40.$$

XI. Von fünf Dörfern müssen zu einer Brandschatzung, welche der Feind auflegte, $2542\frac{1}{2}$ fl. bezahlt werden. Nach dem Gesetze der Billigkeit zahlen die Dörfer nach dem Verhältnisse des Steuerfußes. Nun stehet das Dorf A mit 85 Thlrn., das Dorf B mit 70 Thlrn., D mit 69 Thlrn. und E mit 40 Thlrn. in der Steuer. Wie viel hat jedes Dorf zur angegebenen Brandschatzung beizutragen?

Auflösung.

$$
\left.\begin{array}{l} 339 = 2542\frac{1}{2} \\ 678 = 5085 \\ 6 = 45 \\ 2 = 15 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 85 : x; \\ = 70 : y; \\ = 75 : w; \\ = 69 : v; \\ = 40 : z; \end{array}
$$

$$x = \frac{15 . 85}{2} = 637\cdot5;$$

$$y = \frac{15 . 70}{2} = 525;$$

$$w = \frac{15 . 75}{2} = 562\cdot5;$$

$$v = \frac{15 \;.\; 69}{2} = 517{\cdot}5;$$

$$z = \frac{15 \;.\; 40}{2} = 300.$$

XII. Drei Fuhrleute schaffen von einem und demselben Orte zu einem Baue Steine herbei. A fährt mit 3 Pferden 6 Tage, B mit 2 Pferden 8 Tage und C mit 4 Pferden 6 Tage. Wie viel muß jeder erhalten, wenn sie miteinander 87 fl. bekommen?

Auflösung.

$$\begin{matrix} 58 : 87 \\ 2 : 3 \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &= 3 \;.\; 6 : x; \quad x = \frac{54}{2} = 27; \\ &= 2 \;.\; 8 : y; \quad x = \frac{48}{2} = 24; \\ &= 4 \;.\; 6 : z; \quad x = \frac{72}{2} = 36. \end{aligned} \right.$$

XIII. Vier Fabrikanten pachteten einen Platz zum Bleichen um 100 fl. Es legt A 180 Ellen in der Länge und 60 Ellen in der Breite auf; B 120 Ellen in der Länge und 50 Ellen in der Breite; C 150 Ellen in der Länge und 60 Ellen in der Breite, und D 100 Ellen in der Länge und 40 Ellen in der Breite. Wieviel muß jeder verhältnißmäßig zahlen?

Auflösung.

$$\begin{matrix} 28800 : 100 \\ 288 : 1 \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &= 180 \,.\, 60 : x = 10800 \,.\, x; \\ &= 120 \,.\, 50 : y = 6000 \,.\, y; \\ &= 150 \,.\, 60 : w = 8000 \,.\, w; \\ &= 100 \,.\, 40 : z = 4000 \,.\, z. \end{aligned} \right.$$

$$x = \frac{10800}{288} = 37{\cdot}5;$$

$$y = \frac{6000}{288} = 20{\cdot}83;$$

$$w = \frac{8000}{288} = 27{\cdot}77;$$

$$z = \frac{4000}{288} = 13{\cdot}99.$$

XIV. Unter vier Studierende einer und derselben Klasse sollen nach dem Verhältnisse der Fortgangsplätze 417 fl. 54 kr.

vertheilt werden. Wieviel erhält A, welcher der 3.; B, welcher der 1.; C, welcher der 5., und D, welcher der 8. wurde?

Auflösung.

Offenbar ist die Qualität des Schülers B 3mal höher als die des A, 5mal höher als die des C, und 8mal höher als die des D nach dem Fortgange zu schätzen. Derjenige, welcher eine größere Classifikationszahl hat, muß weniger bekommen... Daher

$$\left.\begin{array}{c} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right) : 417\frac{9}{10} \\ \frac{199}{120} : \frac{4179}{10} \\ 1 : 252 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = \frac{1}{3} : x; \\ = 1 : y; \\ = \frac{1}{5} : w; \\ = \frac{1}{8} : z. \end{array}$$

$$x = 252 : 3 = 84;$$
$$y = 252 : 1 = 252;$$
$$w = 252 : 5 = 50\frac{2}{5};$$
$$z = 252 : 8 = 31\frac{1}{2}.$$

XV. Von einem Jugendfreunde wurden einer Bildungsanstalt 425 fl. 30 kr. geschenkt. Wenn dieses Geld in fünf Klassen, in der Klasse A mit 54, B mit 63, C mit 72, D mit 84 und E mit 100 Schüler, die 5 Ersten erhalten sollen, wieviel bekommt der Erste von der Klasse von A, von B, von C, von D und von E?

Auflösung.

Man nimmt an, daß derjenige Schüler, welcher unter mehreren den ersten Platz erreicht, von besserer Qualität sei, als der, welcher diesen Platz unter wenigeren erringt... Daher

$$\left.\begin{array}{c} (54+63+72+81+100) : 425\frac{1}{2} \\ 370 . 2 : 851 \\ 20 : 23 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 54 : x; \\ = 63 : y; \\ = 72 : w; \\ = 81 : v; \\ = 100 : z. \end{array}$$

$$x = 23 . 54 : 20 = 62{\cdot}1;$$
$$y = 23 . 63 : 20 = 72{\cdot}45;$$
$$w = 23 . 72 : 20 = 82{\cdot}8;$$
$$v = 23 . 81 : 20 = 93{\cdot}15;$$
$$z = 23 . 100 : 20 = 115.$$

XVI. Jemand sagte in seinem Testamente: „Mein Vermögen soll meinen 6 Neffen, welche Schüler verschiedener Klassen sind, nach dem Verhältnisse ihres Fortganges zugetheilt werden.“ Es war nun A unter 50 Schülern der 10., B unter 64 der 8., C unter 84 der 7., D unter 120 der 6., E unter 111 der 3. und F unter 35 der 1.; wieviel wird jeder erhalten haben, wenn die Vertheilungssumme 17608 fl. 30 kr. betrug?

Auflösung.

In diesem Beispiele sind die Bestimmungen zu berücksichtigen, welche in den beiden vorhergehenden berücksichtigt wurden.

$$\left(\frac{50}{10}+\frac{64}{8}+\frac{84}{7}+\frac{120}{6}+\frac{111}{3}+\frac{35}{1}\right) : 17608\frac{1}{2} \left\{\begin{array}{l} = 5 : x; \\ = 8 : y; \\ = 12 : w; \\ = 20 : v; \\ = 37 : t; \\ = 35 : z. \end{array}\right.$$

$$117 \,.\, 2 : 35217$$
$$2 : 301$$

$$x = 1505 : 2 = 752\frac{1}{2};$$
$$y = 2408 : 2 = 1204;$$
$$w = 3612 : 2 = 1806;$$
$$v = 6020 : 2 = 3010;$$
$$t = 11137 : 2 = 5567\frac{1}{2};$$
$$z = 10535 : 2 = 5267\frac{1}{2}.$$

XVII. Vier Kaufleute D, E, F und G traten in Compagnie. D legte 3200 fl., E 4500 fl., F 2700 fl. und G 4000 fl. ein. Sie gewinnen mit der Summe aller Einlagen 4320 fl.; wie viel gebührt nun einem jeden von der Summe nach dem Verhältnisse seines Beitrages?

Auflösung.

$$\begin{array}{r} 14400 : 4320 \\ 100 : 30 \\ 10 : 3 \end{array} \left\{\begin{array}{l} = 3200 : x; \\ = 4500 : y; \\ = 2700 : w; \\ = 4000 : z. \end{array}\right.$$

$$x = 960;$$
$$w = 810;$$
$$y = 1350;$$
$$z = 1200.$$

XVIII. Während eines Sturmes auf dem Meere müssen aus einem Schiffe 3 Fässer Caffee, dem K gehörig, deren Werth 1000 fl. beträgt; 5 Tonnen Häringe, dem L gehörig, im Werthe von 900 fl., und 2 Kisten Farbstoffe, dem M gehörig, im Werthe von 600 fl. über Bord geworfen werden. Dadurch wird dem Schiffer N das Schiff, im Werthe zu 8100 fl., dem Weinhändler O um 5000 fl. Weine, dem Handelsmann P um 3000 fl. Tücher und dem Q um 2400 fl. Fischthran gerettet. Da nun nach einem Seegesetze der im Sturme erlittene Schaden auf alle Interessenten repartirt werden muß, so fragt es sich: Wie viel hat jeder von dem ganzen Verluste zu ertragen?

Auflösung.

$$\begin{matrix} 21000 : 2500 \\ 42 : 5 \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &= 1000 : x; \\ &= 900 : y; \\ &= 600 : w; \\ &= 8100 : v; \\ &= 5000 : t; \\ &= 3000 : s; \\ &= 2400 : z. \end{aligned} \right.$$

$$x = \frac{5000}{42} = 119\frac{1}{21};$$

$$y = \frac{4500}{42} = 107\frac{3}{21};$$

$$w = \frac{3000}{42} = 71\frac{9}{21};$$

$$v = \frac{40500}{42} = 964\frac{6}{21};$$

$$t = \frac{25000}{42} = 595\frac{5}{21};$$

$$s = \frac{15000}{42} = 357\frac{3}{21};$$

$$z = \frac{12000}{42} = 285\frac{15}{21}.$$

Die Lösung solcher Repartitionsbeispiele heißt Habereyrechnung.

XIX. Ein römisches Gesetz (lex falcidia) bestimmte, daß, wenn in einem Testamente die Legaten $\frac{3}{4}$ des hin-

terlassenen Vermögens überstiegen, der Haupterbe $\frac{1}{4}$ des Vermögens (quartam falcidiam) im Voraus nehmen dürfe, und daß dann die übrigen $\frac{3}{4}$ unter die Legatarien nach der im Testamente festgesetzten Ordnung vertheilt werden sollen. Wenn nun Jemand den A als seinen Haupterben ernannte, dem B ein Legat von 800 fl., dem C ein Legat von 1000 fl. und dem D ein Legat von 600 fl. bestimmte, und sein ganzes Vermögen beträgt nur 2600 fl.; wieviel gebührt jedem der Legatarien von Rechtswegen?

Auflösung.

Die Auflösung dieser und ähnlichen Aufgaben heißt Falcidienrechnung.

Die Summe der Legaten 800 + 1000 + 600 fl. übersteigt $\frac{3}{4} \cdot 2600$ um $2400 - 1950 = 450$. Nimmt nun A den vierten Theil hinweg, so bleiben $2600 - 650 = 1950$, welche im Verhältnisse zu theilen sind.

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{r} 2400 : 1950 \\ 48 : 39 \\ 16 : 13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 800 : x; \\ = 1000 : y; \\ = 600 : z. \end{array}$$

$$x = \frac{800 \cdot 13}{16} = 1300 : 2 = 650;$$

$$y = \frac{13000}{16} = \frac{1625}{2} = 812\frac{1}{2};$$

$$z = \frac{7800}{16} = \frac{975}{2} = 487\frac{1}{2}.$$

XX. Es beginnt Jemand ein Unternehmen und verwendet hierzu 5700 fl. Nach Verlauf eines Jahres gesellt sich ihm ein zweiter mit 6900 fl. bei und dann noch nach 8 Monaten ein dritter mit 9000 fl. Von jetzt an nach 1 Jahr 4 Monaten wurde das Geschäft vollendet, bei welchem 20000 fl. Gewinn sich zeigten. Wieviel muß jeder erhalten?

Auflösung.

Es muß berücksichtigt werden die Zeit, durch welche das Kapital eines jeden zum Geschäft benützt wurde.

Die 9000 fl. des C wurden 16 Monate,
„ 6900 fl. des B „ 24 „
„ 5700 fl. des A „ 36 „ benützet, daher

$$42900 : 20000 \atop 429 : 200 \left\{ \begin{array}{l} = 9000 \,.\, 1\frac{1}{3} : x; \\ = 6900 \,.\, 2 : y; \\ = 5700 \,.\, 3 : z. \end{array} \right.$$

$$x = \frac{12000 \,.\, 200}{429} = \frac{4000 \,.\, 200}{143} \text{ d. i. } 5594 \text{ fl. } 24 \text{ kr.};$$

$$y = \frac{13800 \,.\, 200}{429} = \frac{4600 \,.\, 200}{143} \text{ d. i. } 6433 \text{ fl. } 34 \text{ kr.};$$

$$z = \frac{17100 \,.\, 200}{429} = \frac{5700 \,.\, 200}{143} \text{ d. i. } 7972 \text{ fl. } 2 \text{ kr.}$$

XXI. Drei Spekulanten stehen zu einem Unternehmen zusammen unter der gegenseitigen Zusicherung, daß sie Gewinn und Verlust nach Verhältniß der Mitwirkung theilen wollen. D gibt 3000 fl. auf 5 Jahre, E 3800 fl. auf 4 Jahre und F 5000 fl. auf $\frac{1}{2}$ Jahr her. Es zeigt sich nun, daß das ganze Kapital verloren sey; wie haben sich die Unternehmer untereinander zu berechtigen?

Auflösung.

Offenbar wäre es unrecht, wenn F nicht von D und E noch entschädigt würde. Man hat

$$32700 : 11800 \left\{ \begin{array}{l} = 3000 \,.\, 5 : x; \\ = 3800 \,.\, 4 : y; \\ = 5000 \,.\, \frac{1}{2} : z. \end{array} \right.$$

Es trifft also

$$D,\ x = \frac{15000 \,.\, 118}{327} = 5412 \text{ fl. } 51 \text{ kr.};$$

$$E,\ y = \frac{15200 \,.\, 118}{327} = 5485 \text{ fl. } 1 \text{ kr.};$$

$$F,\ z = \frac{2500 \,.\, 118}{327} = 902 \text{ fl. } 8 \text{ kr. Verlust, daher muß}$$

D 5412 fl. 51 kr. — 3000 fl. = 2412 fl. 51 kr. und
E 5485 fl. 1 kr. — 3800 fl. = 1685 fl. 1 kr. an
F bezahlen.

XXII. Drei Kaufmänner, die zu einem Unternehmen, welches in 15 Monate beendet wurde, in Compagnie traten, haben 100000 gewonnen. D hatte anfangs 86000 fl. gegeben, und nach drei Monaten wieder 6000 fl. zurückgenommen, und am Ende des vierten Monats wieder 10000 fl. eingelegt. Der zweite E hat 60000 fl. im Anfange eingelegt, und nach sechs Monaten noch 50000 fl., ließ sich aber am Ende des neunten Monats 10000 fl. zurückbezahlen. F trat am Ende des zweiten Monats der Gesellschaft mit einem Kapital von 100000 fl. bei. Bei seinem Eintritte zeigt sich für D und E ein Verlust von 7300 fl., und im letzten Monate erlitt die Gesellschaft abermals einen Verlust von 2900 fl. Wie ist nun Gewinn und Verlust nach den Einlagen und Zeiten zu vertheilen?

Auflösung.

Solche und ähnliche Aufgaben müssen zur Lösung zerlegt werden.

Der erste Verlust ist von D und E zu tragen; daher

$$146000 : 7300 \left\{ \begin{array}{l} = 86000 : x; \\ = 60000 : y; \end{array} \right.$$
$$20 : 1$$
$$x = 4300;\ x = 3000.$$

Der zweite Verlust betrifft D, E und F, von welchen die Kapitalien sind 90000, 100000 und 100000; daher

$$\begin{array}{r} 29000 : 2900 \\ 1 : 100 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = 9 : x';\ x' = 900, \\ = 10 : y';\ y' = 1000, \\ = 10 : z';\ z' = 1000. \end{array} \right.$$

Der gesammte Gewinn betrug, weil 100000 fl. überhaupt gewonnen wurden, 100000 + 7300 + 2900 = 110200, welche Summe zu vertheilen ist.

Wenn man annimmt, die Unternehmer traten am Anfange des dritten Monats in Compagnie und endeten das Geschäft nach 12 Monaten, so wird das Kapital

des D 6000 fl. auf 1 Monat; d. i. 6000 fl. auf 1 Mon.,
80000 fl. „ 12 „ d. i. 960000 fl. „ „ „
10000 fl. „ 10 „ d. i. 100000 fl. „ „ „
in Summa gleichsam 1066000 fl. auf 1 Monat;

des E 60000 fl. auf 12 Monate; d. i. 720000 fl. auf 1 M.,
+ 50000 fl. „ 3 „ d. i. 150000 fl. „ „ „
+ 40000 fl. „ 5 „ d. i. 200000 fl. „ „ „
in Summa gleichsam 1070000 fl. auf 1 Monat;

des F 100000 fl. auf 12 Monate; d. i. 1200000 fl. auf 1 Mon.

Daher wird

$$\left.\begin{array}{r} 3336 : 11020 \\ 834 : 27550 \\ 417 : 13775 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 1066 : x''; \\ = 1070 : y''; \\ = 1200 : z''. \end{array}$$

$$x'' = \frac{1066 \,.\, 13775}{417} = 35213'789;$$

$$y'' = \frac{1070 \,.\, 13775}{417} = 35345{\cdot}923;$$

$$z'' = \frac{1200 \,.\, 13775}{417} = 39640{\cdot}288.$$

Gewinn des D 35213·789 — 5200 = 30013·789,

„ „ E 35345·923 — 4000 = 31345·923,

„ „ F 39640·288 — 1000 = 38640·288.

XXIII. Ein Krämer erhielt drei Fässer mit ausleerbarer Waare gefüllt, von welchen D $4\frac{3}{4}$ Zt., E 5 Zt. 40 ℔. und F $6\frac{1}{2}$ Zt. brutto wogen. Wieviel mußte er dafür dem Lieferanten bezahlen, wenn vom ersten der Nettopreis für 1 Zt. 70 fl., vom zweiten für 1 Zt. 58 fl. 20 kr. und vom dritten für 1 Ztr. 60 fl. gerechnet wird, und wenn das Faß D 15 ℔., E 21·6 ℔. und F 26 ℔. wog?

Auflösung.

Das Gewicht vom Kaffee ist im Faß

D, 475 — 15 = 460 ℔., deßhalb

$$100 : 460 = 70 : x;$$

$$x = 322; \text{ d. i. } 322 \text{ fl.};$$

E, 540—21·6 = 518·4 ℔., daher

$$100 : 518{\cdot}4 = 58\frac{1}{3} : y;$$

$$100 : 172{\cdot}8 = 175 : y;$$

$$1 : 43{\cdot}2 = 7 : y;$$

$$y = 30{\cdot}24; \text{ d. i. } 302 \text{ fl. } 24 \text{ kr.};$$

F, 650 — 26 = 624 ℔., daher

$$100 : 624 = 60 : z;$$

$$z = \frac{3744}{10}; \text{ d. i. } 374 \text{ fl. } 24 \text{ kr.}$$

Die Bezahlung ist also

für (D + E + F) = 998 fl. 48 kr.

XXIV. Jemand erhält 9 Zentner Waare, den Zentner zu 28 fl. 36 kr. Wieviel hat er zu bezahlen, wenn auf den Zentner $10\frac{1}{2}$ ℔. Tara ausbedungen wurde?

Auflösung.

$$(c + t) : n \,.\, c = g : g';$$

$$110\cdot5 : 909 = 28\frac{3}{5} : x;$$

$$x = \frac{143\,.\,9000}{1105\,.\,5} = \frac{11\,.\,360}{17};$$ d. i. fast 232 fl. 56 kr.

XXV. Wie viele ℔. Tara von dem Zt. ist gerechnet, wenn für 9 Zt. brutto, das ℔. zu 15 kr. gerechnet, 202 fl. 30 kr. bezahlt werden?

Auflösung.

$$n \,.\, c : n' \,.\, (c - t) = g : g';$$

$$t = c \,.\, \left(1 - \frac{g'n}{gn'}\right);$$

$$t = 100 \,.\, \left(1 - \frac{810}{900}\right) = 10.$$

$c = 100;$
$n = 1;$
$n' = 900;$
$g = \frac{1}{4};$
$g' = 202\cdot5;$
$t = x.$

XXVI. Ein Kaufmann erhielt mehrere Zentner Bleierz, den Zentner um 11 fl. 30 kr. Da in diesem viel Kies sich zeigte, und da das Erz noch feucht war, so ließ ihm der Lieferant 4 ℔. p. c. Gutgewicht und 8 ℔. Fusti. Wie theuer darf er nun das ℔. Fusti an einem Töpfer, welcher dieses Erz zur Glasur seines Fabrikats gebraucht, verkaufen, wenn er nur 20 p. c. gewinnen will?

Auflösung.

Zusammengesetzter Reesischer Ansatz.

Einnahme x	1 ℔.
℔. 100	$11\frac{1}{2}$ fl. Auslage
Auslage 100 fl.	120 fl. Einnahme
Fusti 92 ℔.	100 ℔. } wirkl. Gewicht
Gutgew. 96 ℔.	100 ℔. } wirkl. Gewicht
2 . 4 . 8 . x	10

$$x = \frac{5.2}{4.8.2} = \frac{5}{32};$$ d. i. 9 kr. 3 hl.

XXVII. Wie viele ℔. Sterling (1 Lst. = 12 fl.) kosten 1918 engl. ℔. brutto, wenn 1 bayer. ℔. netto (in London ohne Spesen) um 2 fl. 30 kr. bezahlt wird, wenn 8 ℔. Tara von dem Zentner, 20 p. c. Spesen incl. Fracht, 10 p. c. Fusti angenommen sind, und wenn 1000 bayer. ℔. = 822 engl. ℔. sind?

Auflösung.

Nach Reesischem Ansatz.

Lst. x	1918 ℔. engl.	x	1918
engl. ℔. 100	90 ℔. engl. w. Fusti	100	90
engl. ℔. 822	1000 ℔. bayer.	822	1000
brutto ℔. 100	92 ℔. netto	100	92
netto 1 ℔.	$2\frac{1}{2}$ fl. Waarenpr.	100	5
		12	120
Waarpr. 100 fl.	120 fl. mit Spesen	2	
fl. 12.	1 Lst.	822	23.59
		x	1918. 9
		274	x 69.1918

x = 483.

XXVIII. Jemand verkauft in London 137 engl. ℔. Waare, von welcher er das bayer. ℔. netto in Bayern um 3 fl. 24 kr. verkaufen könnte. Um wie viel Pfund Sterling hat er sie dort zu erlassen, wenn 10 ℔. p. c. Fusti, 4 ℔. p. c. Tara und 15 p. c. Spesen gerechnet werden, und wenn 1000 ℔. bayer. = 822 ℔. englisch sind?

Auflösung.

Lst. x	137 ℔. engl. brutto	x	137
brutto ℔. 100	96 ℔. netto	100	96
Fusti ℔. 100	90 ℔. gut	100	90
℔. 822	1000 ℔.	822	1000
℔. 1	$3\frac{2}{5}$ fl. rein Einnahme	85	17 ; 5
		12	100
rein Einnahm 85 fl.	100 fl. mit Spesen	6 . x	96
fl. 12.	1 Lst.	5 . 5	100
		12	9

x = 48.

XXIX. Einem Bücherliebhaber verspricht ein Buchhändler 20 pc. Rabatt. Wieviel hat der erstere zu bezahlen,

wenn ihm sein Bücherconto Ladenpreis 278 fl. 50 kr. Schulden an letzteren angibt?

Auflösung.

$$100 : 80 = 278\frac{5}{6} : x;$$

$$60 : 8 = 1673 : x;$$

$$x = \frac{13384}{60};\ \text{d. i. } 223 \text{ fl. } 4 \text{ kr.}$$

XXX. Ein unvermöglicher Mann erbt eine Obligation von 8800 fl., welches Geld aber erst nach zwei Jahren fällig ist. Um nicht noch zwei Jahre im Elend schmachten zu dürfen, will er für sein Erbgut sich ein Anwesen kaufen; wie viele Gulden müssen ihm wenigstens ausbezahlt werden, wenn der Zinsfuß 5 pc. ist?

Auflösung.

$$100 . 1 : 2 . x = 5 : y = 5 : (8800 - x);$$

$$10\ x = 880000 - 100\ x;$$

$$x = \frac{880000}{110} = 8000.$$

XXXI. Jemand hat unter der Bedingung ein Landgut um 5000 fl. gekauft, daß er an dem Verkäufer 2000 fl. nach $\frac{1}{2}$ Jahr, 2000 fl. nach $1\frac{1}{4}$ Jahr und die übrigen 1000 fl. nach 20 Monaten bezahlen dürfe. Der Käufer und der Verkäufer kommen überein, daß die ganze Summe auf einmal erlegt werden soll; nach welchem Zeitverlauf kann dieses geschehen, wenn keiner im Nachtheil seyn soll?

Auflösung.

Es verhält sich das Kapital multiplizirt mit der Zahl der Zeit zum Kapital mit der Zeit, wie Vortheil zu Vortheil. — Es kann dann jedes der Glieder eine einfache oder zusammengesetzte Größe seyn. — Wenn der Vortheil des Einen nicht Nachtheil des Andern ist, d. i. wenn die Vortheile einander gleich sind, so wird die Proportion eine Gleichung im engern Sinne.

$$K . Z : K' . Z' = N : N';$$

$$5000 . x : \left(2000 . \frac{1}{2} + 2000 . \frac{4}{5} + 1000 : \frac{3}{5}\right) = 1 : 1;$$

$$5 . x : \left(1 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3}\right) = 1 : 1;$$

$$x = \frac{31}{6 . 5} = \frac{31}{30} = 1\frac{1}{30};$$ d. i. 1 Jahr 12 Tage.

XXXII. Ein Menschenfreund bestimmte in seinem Testamente, daß seine Kapitalien seine Schuldner zwei Jahre ohne Zinsen benützen und dann erst an die Erben auszahlen sollen. Ein sehr armer junger Mensch, welcher 9000 fl. erbte, nahm von einem Schuldner, um eine bequemere Existenz zu haben, sogleich nach dem Tode des Testators 3000 fl. und sagte, er wolle das Uebrige nicht auf einmal, sondern in drei gleichen Terminen und Termingeldern. Wie viele Monate betrug die Terminzeit?

Auflösung.

$$9000 . 24 : 2000 \times (x + 2 . x + . 3 . x) = 1 : 1;$$
$$9 . 12 : \quad 6 . 6 = 1 : 1;$$
$$x = 18.$$

III. Punkt.

Mischungs-Alligations-Rechnungen (§. 113. b. γ).

§. 130.

Erklärungen.

1) Rechnungen mit benannten Zahlen, mittelst welchen gefunden wird für verschiedene Waaren, von verschiedenen Preisen und in verschiedener Quantität in eine Masse gemischt,

der mittlere Preis der Mischung (Mischungspreis, Mittelpreis), oder

die jedesmalige Größe der einzelnen Quantitäten (aus ihren Werthen, aus dem ganzen Mischungsquantum und dem Werthe von diesem), oder

das ganze Mischungsverhältniß (und darnach die Größe der einzelnen Quantitäten) nennt man überhaupt

Mischungsrechnungen. — Eine Anleitung, solche Rechnungen auflösen zu können, heißt Mischungsregel.

2) Die Lösung der Aufgaben, den mittleren Preis

(die Mittelgröße für mehrere Größen) zu finden, ist bei den praktischen arithmetischen Proportionen angegeben.

* Vergl. §. 122. Hier hievon mehrere Beispiele.

Die Regel, in einer Mischung von verschiedenen Ingredienzen die jedesmalige Größe der einzelnen Quantitäten zu finden, heißt vorzugsweise Mischungsregel, und ist ganz ähnlich der für die Gesellschaftsrechnung.

* Nach dieser Regel arbeitet man vorzüglich in der Chemie, laut welcher Stoffe mehrmals nur in gewissen Verhältnissen sich verbinden.

Die Regel, welche angibt, das Mischungsverhältniß zu bestimmen, heißt Alligationsregel und hat eigene Gesetze, welche angegeben werden können in der Aufgabe:

Aus dem mittleren Werthe (oder dem Mischungspreise) und aus den einzelnen Preisen der zu vermischenden Waaren das Verhältniß der zu vermischenden Quantitäten zu finden.

* Unter den zu mischenden Ingredienzen muß immer wenigstens (wie leicht einzusehen ist) eines sein, welches geringern Werthes ist als die Mischung.

** Die Alligationsrechnung unterscheidet sich dadurch von der Mischungsrechnung im engern Sinne, daß in ihr das Verhältniß der Theile nicht unmittelbar gegeben ist, sondern erst gesucht werden muß.

3) Wenn die allgemeine Aufgabe der Alligationsrechnung für ein spezielles Beispiel aufzulösen ist, so unterscheide man

a) ob zwei, oder

b) ob mehr als zwei verschiedene Dinge zu vermischen sind.

* Gegenstände, die zur Mischung fähig erkannt werden, müssen in Haupteigenschaften überein kommen. Man denkt z. B. daß verschiedene Sorten von Wein, von Taback, von Getreide... oder auch Wein und Wasser, Zinn und Blei, Kupfer und Silber... nie aber Bleischrott und Rübsaamen u. dgl. vermischt werden können.

a.

Wenn zwei Dinge zu vermischen sind.

α) Man suche die Differenzen

zwischen dem Mischungspreise und der bessern Sorte, und zwischen dem Mischungspreise und der geringern Sorte.

β) Die Summe dieser Differenzen ist die Theilzahl für das Mischungsquantum = 1, zu welchem so viele Theile von der geringern Sorte als die Differenz zwischen der bessern Sorte und Mischungszahl und so viele von der bessern Sorte als die Differenz zwischen der geringern Sorte und der Mischungszahl Einheiten enthält, genommen werden.

* Diese so gefundenen Verhältnißzahlen sind Brüche, welche sich immer in ganze Zahlen umwandeln lassen.

b.

Wenn mehr als zwei Dinge zu vermischen sind.

α) In diesem Falle müssen von allen Werthen der zu mischenden Dinge, jedesmal ein größerer und kleinerer als der Mischungswerth, mit dem Mischungspreise verglichen werden, so daß, wenn n Ingredienzen gemischt werden, n — 1 nach a bezeichnete Vergleiche geschehen.

β) Die Differenzen werden wieder in einer Summe als Theilzahl für das Mischungsquantum = 1 betrachtet, und nach obiger Art die Hergabe von jedem Ingredienz bestimmen.

* Warum und wie nach Beachtung dieser Regel in a und b die Aufgabe der Alligationsrechnung gelöst ist, wird bei den Beispielen deutlich gemacht.

4) In Problemen, welche nach der Alligationsregel zu lösen sind, wird außer den Preisen der Ingredienzen öfters gegeben

a) das Quantum eines einzelnen Ingredienz, oder

b) das ganze Mischungsquantum.

a.

Ist das Quantum eines Ingredienz gegeben, so suche man die Quantitäten der übrigen, wenn die Verhältnißzahlen vorher gesucht sind, indem man sagt, die einzelnen Verhältnißzahlen verhalten sich zu einander, wie die ihnen entsprechenden Quantitäten.

b.

Ist das ganze Mischungsquantum gegeben, so hat man nach aufgefundenen Verhältnißzahlen nur eine Gesellschaftsrechnung (nach §. 112. §. 129) zu lösen.

§. 131.

Beispiele.

1. Beispiele nach der Mischungsregel im engern Sinne:

I. In die Mischung zu einem guten Schießpulver rechnet man auf 16 Loth Salpeter 3 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel. Wieviel Pfunde von jedem Ingredienz zu 64 Zt. 26 ℔. genommen werden?

Auflösung.

$$\begin{array}{r} (16 + 3 + 2) : 6426 \\ 21 : 6426 \\ 1 : \;\; 306 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} 16 : x; & x = 4866; \\ 3 : y; & y = \;\; 918; \\ 2 : z. & z = \;\; 612. \end{array} \right.$$

II. Man rechnet zu einer guten schwarzen Tinte auf 1 Maaß Regenwasser (2·95 ℔. bayer. Apoth. Gewicht), 2·28 Unzen Eisenvitriol, 4·56 Unzen Galläpfel und 0·76 Unzen Gummi. Wenn man von 5 Maaß Wasser Tinte bereiten wollte, wie viel müßte von jedem der genannten Ingredienzen genommen werden?

Auflösung.

$$7{\cdot}6 : 5 \left\{ \begin{array}{ll} = 2{\cdot}28 : x; & x = 1{\cdot}5; \\ = 4{\cdot}56 : y; & y = 3; \\ = 0{\cdot}76 : z; & z = 0{\cdot}5. \end{array} \right.$$

III. Es soll eine Statue von Bronze, 75 Zt. schwer, gegossen werden. Wieviel muß hiezu Kupfer genommen werden, wenn gewöhnlich aus 100 Theilen Kupfer und 36 Theilen Zinn besteht?

Auflösung.

$$x = 6{\cdot}25; \;\; y = 22{\cdot}5.$$

IV. Es sollen Kanonen 157 Zt. 55 ℔. schwer gegossen werden. Wenn nun zum Kanonenmetall gewöhnlich auf 1 Theil Kupfer 0·09 Theile Zinn und 0·06 Theile Messing gerechnet werden, so frägt es sich, wieviel von diesen Metallen zur Fertigung der Kanonen zu nehmen sey?

Auflösung.

$$\begin{array}{r} 1{\cdot}15 : 157{\cdot}55 \\ 1 : \;\; 137 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} = \;\; 1 : x; & x = 137; \\ = 0{\cdot}09 : y; & y = 12{\cdot}33; \\ = 0{\cdot}06 : z; & z = 8{\cdot}22. \end{array} \right.$$

V. Die Zahlen der Gewichtsbestandtheile zu einer Arznei verhalten sich, wie 1 : 0·7 : 0·4 : 0·08 : 0·07. Wie viele Gewichtstheile sind zu dieser Arznei zu nehmen, welche $7\frac{1}{2}$ Loth wiegen soll?

Auflösung.

$$\begin{array}{r} 2{\cdot}25 : 7{\cdot}5 \\ 3 : 10 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} = 1 : x; & x = 3{\cdot}333. \\ = 0{\cdot}7 : y; & y = 2{\cdot}333. \\ = 0{\cdot}4 : w; & w = 1{\cdot}333. \\ = 0{\cdot}08 : v; & v = 0{\cdot}266\ldots \\ = 0{\cdot}07 : z. & z = 0{\cdot}233\ldots \end{array} \right.$$

II. Beispiele nach der Alligationsregel.

I. Ein Silberarbeiter soll aus 12löthigem Silber Gefäße verfertigen. Er hat aber nur 10- und 15löthiges. Wie hat er die Mischung zu machen?

Auflösung.

α) 15 — 12 = 3;	Er nehme das Mischungsquantum $= 1 = \frac{5}{5}$.
12 — 10 = 2;	dieses setze er zusammen aus $\frac{3}{5}$ vom 10löthig.
β) 3 + 2 = 5.	und $\frac{2}{5}$ vom 15löthigen, und er hat 12löthiges Silber.

Denn $\frac{3}{5} \times 10 = 6;$

$\frac{2}{5} \times 15 = 6.$ cf. §. 122.

$12 : 1 = 12.$

Erörterung. Wenn ein Mischer das Mischungsquantum = 1, (= q) nehmen will, so hat er offenbar, wenn x der Theil von der besseren Sorte in der Mischung ist, für den Theil von der geringern Sorte 1 — x, (q — x). Der Werth von der bessern Sorte ist, weil die Einheit derselben zu 15 (= a) gerechnet ist, 15 . x oder (a . x); der Werth von der geringern Sorte ist, weil die Einheit zu 10 (= b) gerechnet ist, 10 . (1 — x) oder b . (q — x). Diese Werthe zusammengenommen, müssen gleich dem Werthe der Mischung seyn; dieser aber beträgt, weil die Einheit zu 12 (= c) gerechnet ist, 12 . 1 oder (c . q). Man hat also

$15 . x + 10 . (1 - x) = 12 . 1;$ | $a . x + b . (q - x) = c . q;$
$15 . x + 10 - 10 . x = 12;$ | $a . x + b . q - b . x = c . q.$

Wenn man nun auf beiden Seiten 10, (b . q) abzieht, so wird

$15 . x - 10 . x - 1 . 12 - 1 . 10;$ | $a . x - b . x = c . q - b . q.$

Man kann jetzt einen Faktor, der mehrern Produkten gemeinschaftlich ist, außer Klammern setzen, so wird

$x . (15 - 10) = 1 . (12 - 10);$ | $x . (a - b) = q . (c - b).$

Wird nun dividirt auf beiden Seiten, daß x keinen Mitfaktor hat, so hat man gefunden

$$x = \frac{1 . (12 - 10)}{15 - 10}; \quad \Big| \quad x = \frac{q . (c - b)}{a - b};$$ d. h.

von der besseren Sorte ist zu nehmen das Mischungsquantum = 1 (= q), multiplizirt mit der Differenz zwischen dem Mischungspreise und geringeren Sorte, dividirt durch die Differenz zwischen der besseren und geringern Sorte (oder durch die Summe aus den Differenzen zwischen dem Mischungspreise und der geringern Sorte und zwischen der besseren Sorte und dem Mischungspreise).

II. Ein Weinwirth will aus zweierlei Weinen, zu 2 fl. und 48 kr. ein Gemisch machen, um einen Wein zu erhalten, der 1 fl. 36 kr. werth ist. Was hat er für Mischungszahlen zu brauchen?

Auflösung.

α) $120 - 96 = 24;$ | Er hat für das Quantum $= 1 = \frac{72}{72}$,
$96 - 48 = 48;$ | $\frac{24}{72} + \frac{48}{72}$ oder $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$
β) $48 + 24 = 72.$

Die Mischungszahlen sind: 1 und 2.

III. Ein Goldarbeiter will aus 12= und 18karätigem Golde und Kupfer 15karätiges Gold machen. Welches sind die Mischungszahlen für diese Metalle?

Auflösung.

α) $20 - 15 = 5;$ $18 = 15 = 3;$
$15 - 0 = 15;$ $15 = 0 = 15.$

β) $15 + 5 + 15 + 3 = 38.$

Die Mischungszahlen sind: 15, 15, 8; denn

$$15 . 20 = 300;$$
$$15 . 18 = 270;$$
$$8 . 0 = 0;$$
$$570 : 38 = 15.$$

IV. Ein Silberarbeiter soll eine Arbeit liefern, die 20 Mark wiegt und 12löthig ist. Er hat aber nur reines und 15löthiges Silber vorräthig. Wieviel muß er Kupfer beimischen, um die Arbeit der Bestellung gemäß fertigen zu können?

Auflösung.

α) $16-12=4;\ 15-12=3;$

$12-0=12;\ 12-0=12;$

β) $(4+3)+12+12=31.$

Er hat zu nehmen vom reinen Silber 12 Thle.

" " " " " 15löthigen 12 Thle.

" " " " " Kupfer 7 Thle.

$$31:20\left\{\begin{array}{l}=12:x;\quad x=\frac{240}{31}=7\cdot742\ldots\\=12:y;\quad y=\frac{240}{31}=7\cdot742\ldots\\=7:z.\quad z=\frac{140}{31}=4\cdot548.\end{array}\right.$$

V. Jemand bezahlte mit 100 Stücken Geldes, Kronenthalern, Bayerthalern und Guldenstücken, 224 fl. Wieviel Stücke hatte er von jeder Sorte?

Auflösung.

Man denke sich, es sey eine Mittelsorte vom Gelde zu bilden, in der das Stück $\frac{240}{100}$ fl. Werth hält.

α) $\frac{270}{100}-\frac{224}{100}=\frac{46}{100};\ \frac{240-224}{100}=\frac{16}{100};$

$\frac{224}{100}-\frac{100}{100}=\frac{124}{100};\ \frac{224-100}{100}=\frac{124}{100}.$

β) Man erhält daraus die Mischungszahlen 124, 124, 62; oder 2, 2, 1.

$$\begin{array}{r}(2+2+1):100\\1:20\end{array}\left\{\begin{array}{l}=2:x;\quad x=40;\\=2:y;\quad y=40;\\=1:z.\quad z=20.\end{array}\right.$$

$$40\times\frac{27}{10}+40\times\frac{24}{10}+20=108+96+20=224.$$

VI. Ein Silberarbeiter hat $2\frac{1}{2}$ Mark reines Silber;

wieviel muß er 14löthiges und wieviel Kupfer dazu schmelzen, um 12löthiges zu erhalten?

Auflösung.

α) $16-12=4$; $14-12=2$;
$12-0=12$; $12-0=12$;

β) die Mischungszahlen sind 12, 12, 6; oder 2, 2, 1;

daher ist zu nehmen 14löthiges $2\frac{1}{2}$ Mark und

Kupfer $1\frac{1}{4}$ Mark.

VII. Jemand bringt zu einem Silberarbeiter einige Silberarbeiten mit der Wiener- und der Altenburger-Probe, und sagt, man möchte ihm einen 9 Mark schweren Pokal für die Frankfurter-Probe und einen 8 Mark schweren für die Prager Probe fertigen. Welche Mischung muß der Goldschmid machen, wenn er weiß, daß gesetzlich das Silber in Wien 14löthig, in Amsterdam, Augsburg, Danzig, München 13löthig, in den freien Städten $12\frac{1}{2}$löthig, in Böhmen, Preußen, Sachsen 12löthig und in Altenburg 10löthig verarbeitet werden darf?

VIII. In Bayern soll das Münzsilber zu 13·3 Loth verarbeitet werden. Wenn nun dieses Königreich Perus Bergwerke hätte und diese, wie ehemals, jährlich im Durchschnitte 500000 Mark fein Silber lieferten, wieviel Kupfer dürfte zugesetzt und wie viele Gulden dürften geprägt werden?

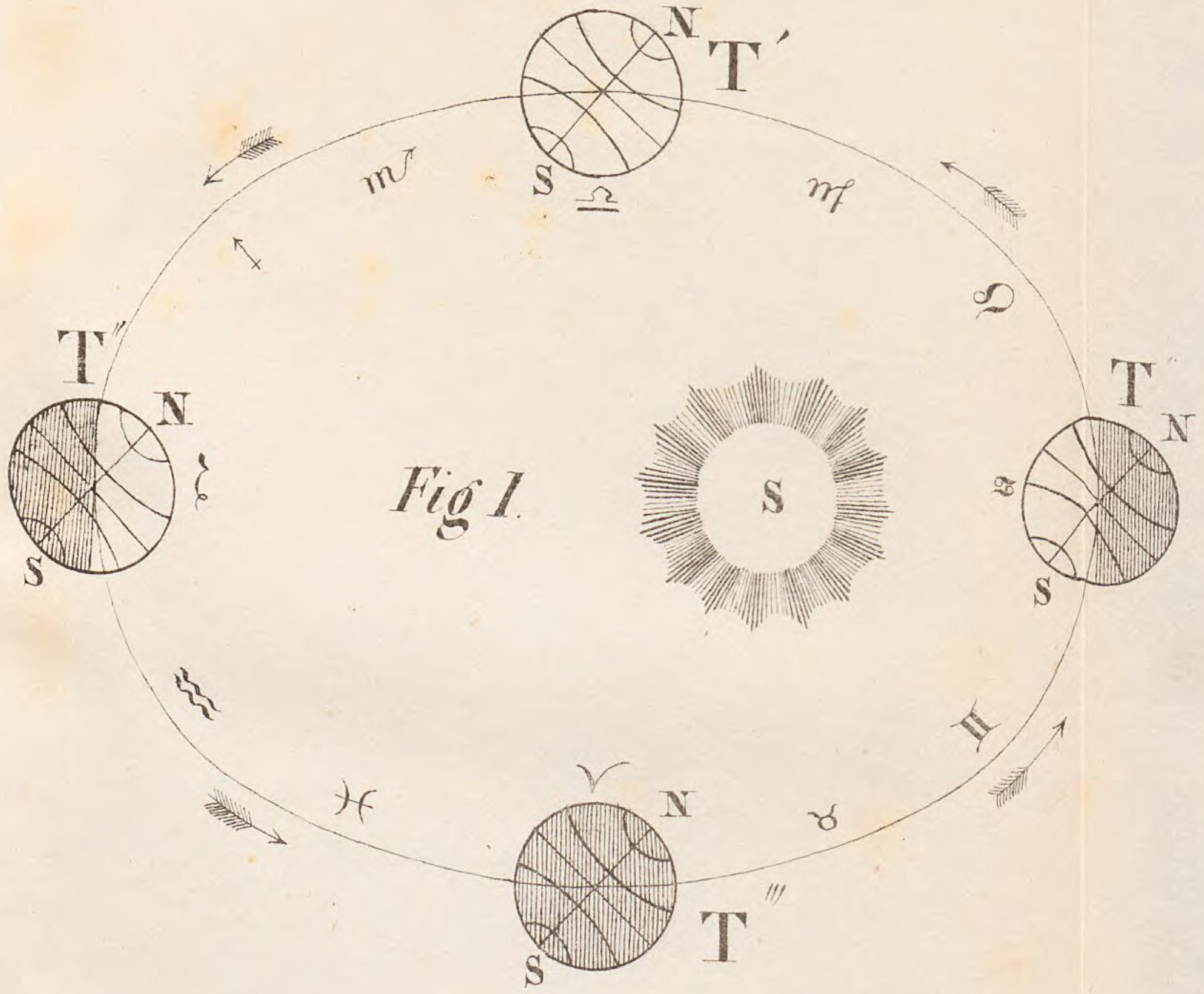


Fig I.

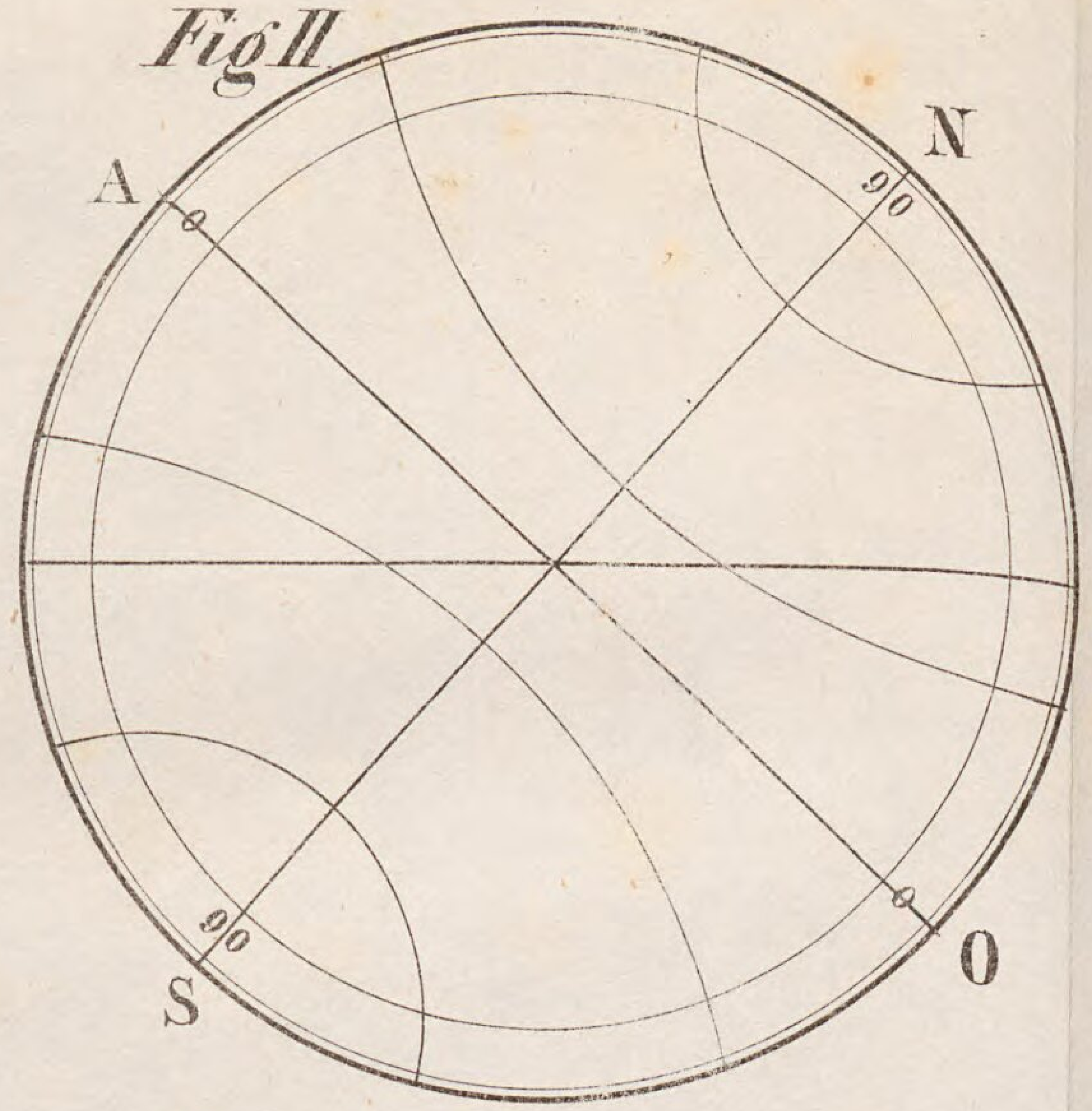


Fig II.

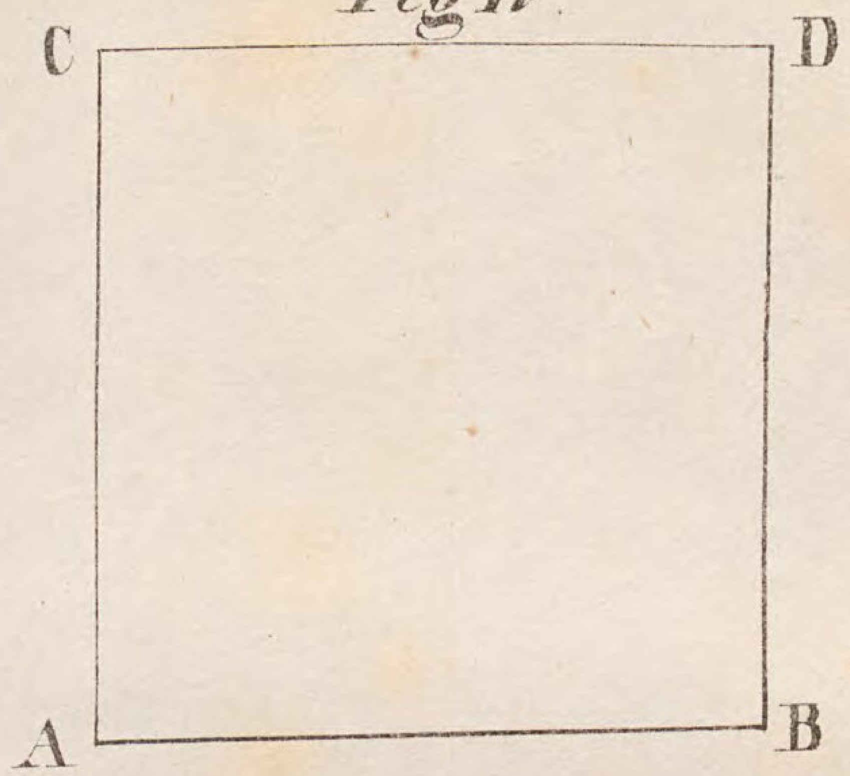


Fig IV.

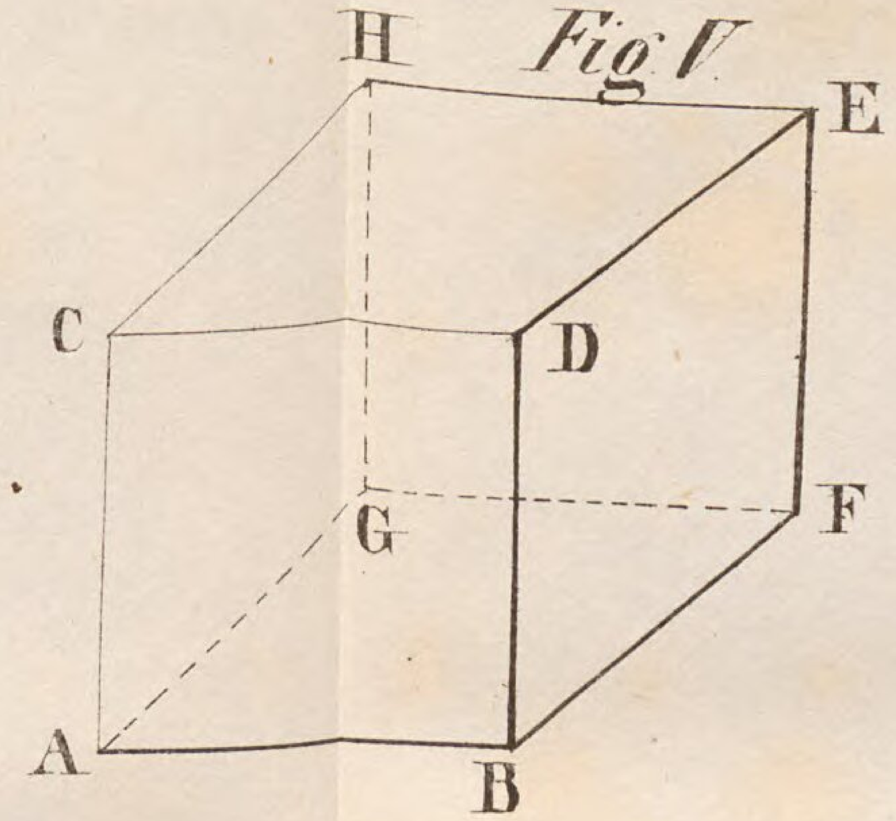


Fig V.

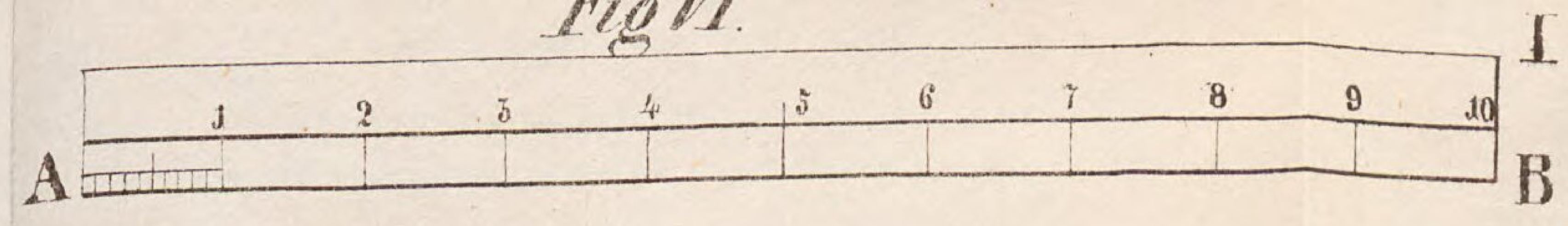


Fig VI.

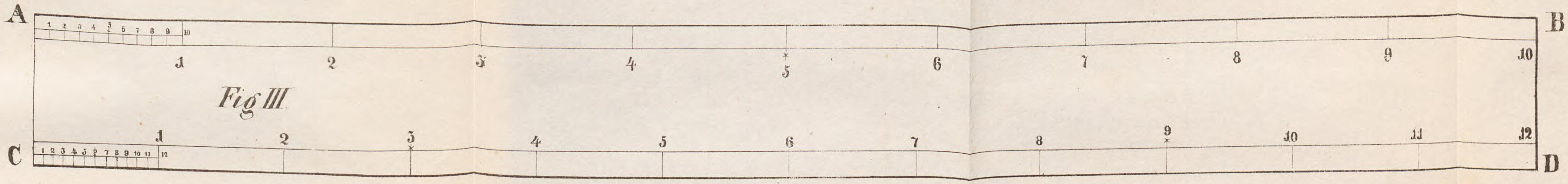


Fig III.

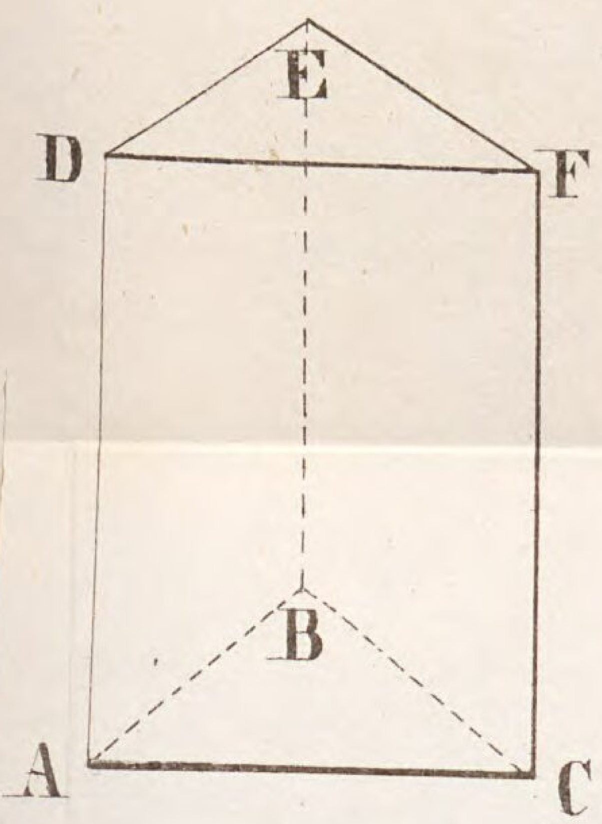


Fig VII.

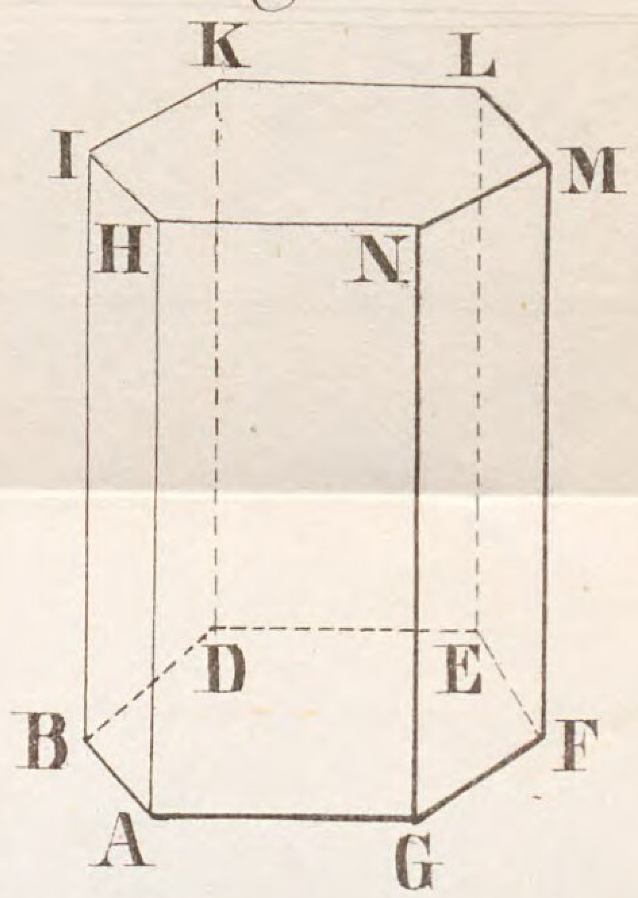


Fig VIII.

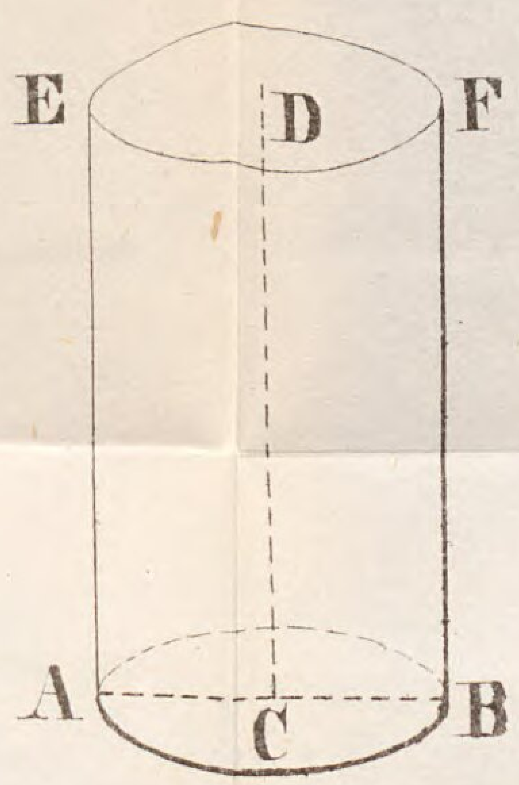


Fig IX.

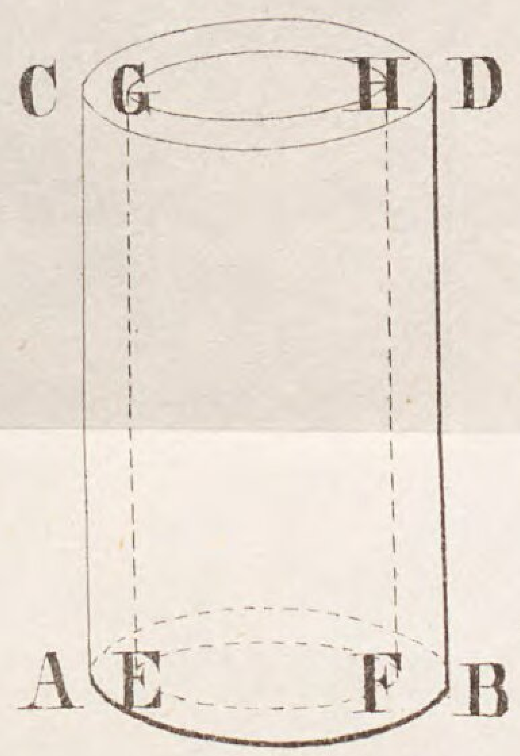


Fig X.

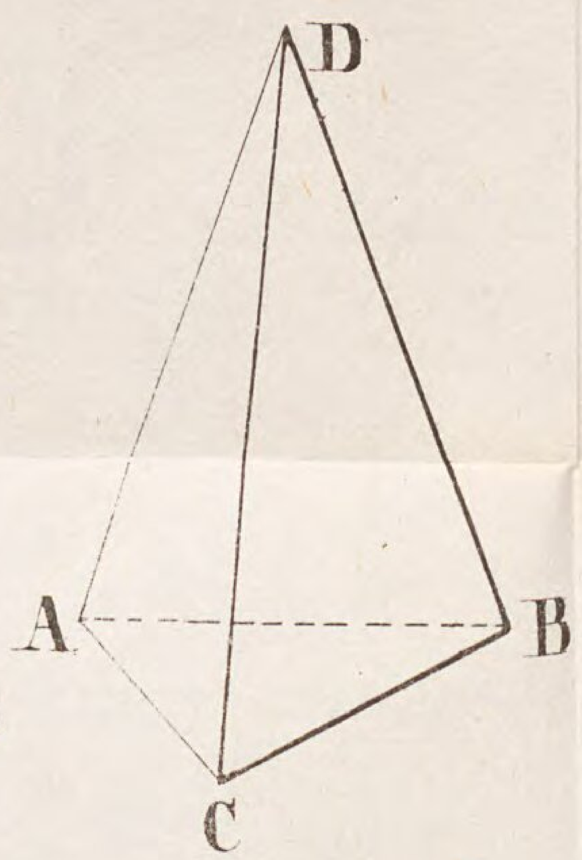


Fig XI.

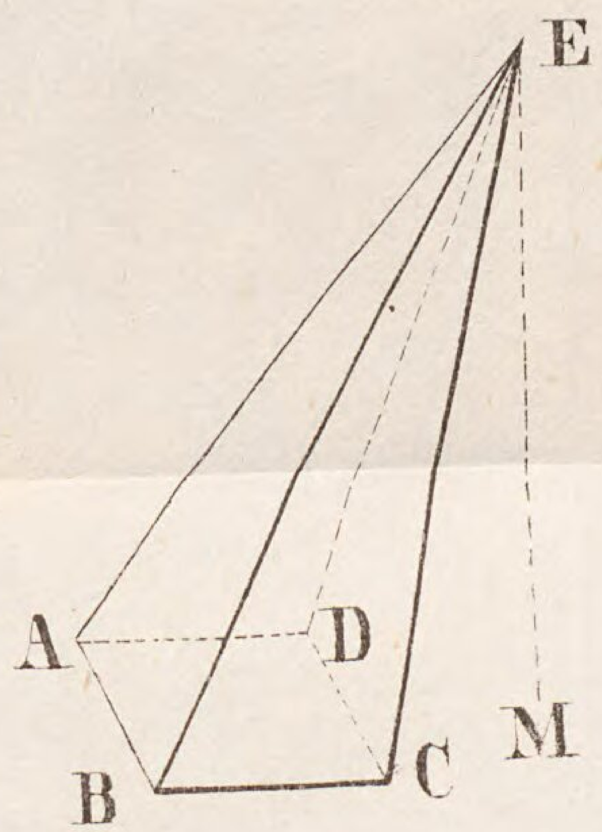


Fig XII.

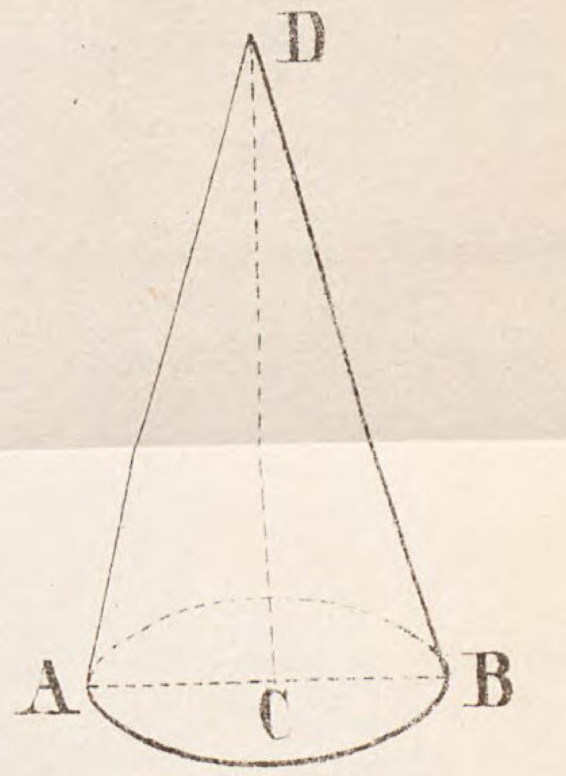


Fig XIII.

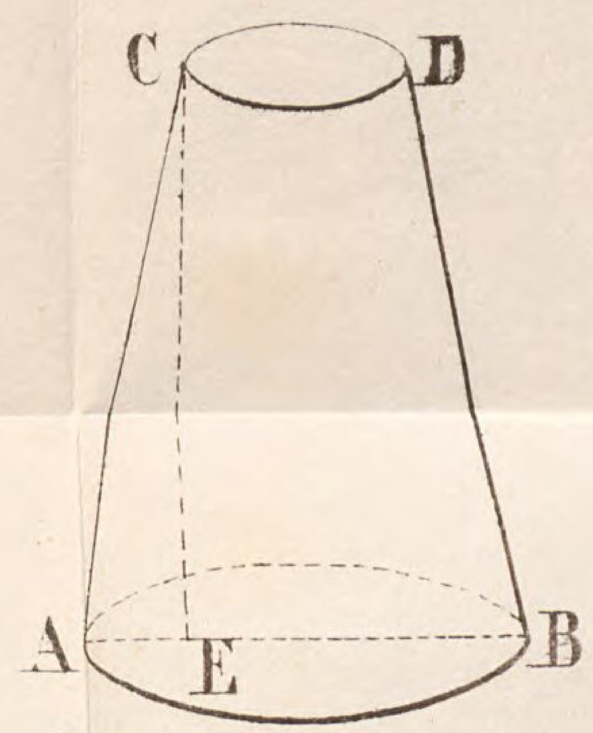


Fig XIV.

Preyssinger, Ludwig,

Leitfaden zum Unterricht in der niederen, reinen u. angewandten Arithmetik

München 1850